习 题 12.1

1. 证明下列级数收敛，并求其和：

(1) $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$；

(2) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

2. 证明：若级数 $\sum u_n$ 发散，$c\neq 0$，则 $\sum cu_n$ 也发散.

3. 设级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散，试问 $\sum(u_n+v_n)$ 一定发散吗？又若 u_n 与 v_n $(n=1,2,\cdots)$ 都是非负数，则能得出什么结论？

4. 证明：若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a$.

5. 证明：若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$，则

(1) 级数 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 发散；

(2) 当 $b_n\neq 0$ 时，级数 $\sum\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{1}{b_1}$.

6. 应用第 4,5 题的结果求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$.

7. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\frac{\sin 2^n}{2^n}$；　(2) $\sum\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$；

(3) $\sum\frac{(-1)^n}{n}$；　(4) $\sum\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$.

---

8. 证明级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是：任给正数 ε，存在某正整数 N，对一切 $n>N$ 总有

$$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon.$$

9. 举例说明：若级数 $\sum u_n$ 对每个固定的 p 满足条件

$$\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}+\cdots+u_{n+p})=0,$$

此级数仍可能不收敛.

10. 设级数 $\sum u_n$ 满足：加括号后级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(u_{n_k+1}+u_{n_k+2}+\cdots+u_{n_{k+1}})$ 收敛 $(n_1=0)$，且在同一括号中的 $u_{n_k+1},u_{n_k+2},\cdots,u_{n_{k+1}}$ 符号相同，证明 $\sum u_n$ 亦收敛.

1.

(1) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-4)(5k+1)}=\frac{1}{5}\cdot\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)$

$\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{5}\Rightarrow S=\frac{1}{5}$

(2) $\sum_{k=m+1}^{m+p}u_k=\sum_{k=m+1}^{m+p}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)\leqslant\sum_{k=m+1}^{m+p}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^k=\frac{5^{m+1}}{6^m}\cdot\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^p\right)<5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^m$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists N=\log_{\frac{5}{6}}\frac{\varepsilon}{5}$ s.t. $\forall m>N,\ p\in\mathbb{Z}^+,\ \left|\sum_{k=m+1}^{m+p}u_k\right|<\varepsilon\Rightarrow\sum u_n$ 收敛

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{3}{2}$

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{4}$

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)=1-\sqrt{2}$

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}=2$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=1$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=3$

2. $\sum u_n$ 发散 $\Rightarrow\exists\varepsilon_1>0$ s.t. $\forall N>0$, s.t. $m_0>N,\ p_0\in\mathbb{Z}^+$ s.t. $\left|\sum_{n=m_0+1}^{m_0+p_0}u_n\right|\geqslant\varepsilon_1$

$\Rightarrow\left|\sum_{n=m_0+1}^{m_0+p_0}cu_n\right|=|c|\left|\sum_{n=m_0+1}^{m_0+p_0}u_n\right|\geqslant|c|\varepsilon_1$

$\Rightarrow\exists\varepsilon_0=|c|\varepsilon_1>0$ s.t. $\forall N>0$, s.t. $m_0>N,\ p_0\in\mathbb{Z}^+$ s.t. $\left|\sum_{n=m_0+1}^{m_0+p_0}cu_n\right|\geqslant\varepsilon_0$

3.

(1) 不一定，令 $u_n=n,\ v_n=-n$，则 $\sum u_n,\ \sum v_n$ 均发散，$\sum(u_n+v_n)=0$

(2) 一定

记 $\sum u_n,\ \sum v_n$ 的部分和分别为 $S_n,\ T_n$.

假设 $\{S_n\}$ 存在上界

$u_n\geqslant 0\Rightarrow S_{n+1}\geqslant S_n$

由单调有界定理可知，$\{S_n\}$ 收敛，与 $\sum u_n$ 发散矛盾！

故 $\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$

同理 $\lim_{n\to+\infty}T_n=+\infty$

故 $\lim_{n\to+\infty}(S_n+T_n)=+\infty\Rightarrow\sum(u_n+v_n)$ 发散

4. $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n+1})=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=\lim_{n\to+\infty}(a_1-a_{n+1})=a_1-a$

5.

(1) $\sum(b_{n+1}-b_n)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=\lim_{n\to+\infty}(b_{n+1}-b_1)=\infty\Rightarrow\sum(b_{n+1}-b_n)$ 发散

(2) $\lim_{n\to+\infty}b_n=\infty\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{b_n}=0$

$\sum\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k+1}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{1}{b_1}$

6.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a+n-1)=+\infty$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a+n-1}-\frac{1}{a+n}\right)=\frac{1}{a}$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n-1)=+\infty$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=1$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+1)=+\infty$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right)=\frac{1}{2}$

7.

(1) $\left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p}\frac{\sin 2^n}{2^n}\right|\le\sum\limits_{n=m+1}^{m+p}\left|\frac{\sin 2^n}{2^n}\right|\le\sum\limits_{n=m+1}^{m+p}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^m}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^p\right]<\frac{1}{2^m}$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists N=\log_{\frac{1}{2}}\varepsilon$ s.t. $\forall m>N,\ p\in\mathbb{Z}^+,\ \left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p}\frac{\sin 2^n}{2^n}\right|<\varepsilon\Rightarrow\sum\frac{\sin 2^n}{2^n}$ 收敛

(2) $\sum\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}=\sum\frac{(-1)^{n-1}}{2+\frac{1}{n^2}}$

$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{4}$ s.t. $\forall N>0,\ \exists m=N+1,\ p=1$ s.t. $\left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}\right|=\frac{1}{2+\frac{1}{(N+1)^2}}>\frac{1}{2+1}>\varepsilon_0\Rightarrow\sum\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$ 发散

(3) $\sum\frac{(-1)^n}{n}=\sum\left(\frac{-1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)=\sum-\frac{1}{(2n-1)(2n)}$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists N=\frac{1}{2\varepsilon}-1$ s.t. $\forall m>N,\ p\in\mathbb{Z}^+,\ \left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p}-\frac{1}{(2n-1)(2n)}\right|=\sum\limits_{n=m+1}^{m+p}\frac{1}{(2n-1)(2n)}<\sum\limits_{n=2m+2}^{2m+2p}\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{2m+2}-\frac{1}{2m+2p}<\frac{1}{2m+2}<\varepsilon\Rightarrow\sum\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

(4) $\exists\varepsilon_0=\frac{1}{2},\ \forall N>0,\ \exists m=2^{[\log_2 N]+1},\ p=2^{[\log_2 N]+1}$ s.t. $\left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p}\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}\right|>\sum\limits_{n=m+1}^{m+p}\frac{1}{n}>p\cdot\frac{1}{m+p}=\frac{1}{2}\ge\varepsilon_0\Rightarrow\sum\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$ 发散

8.

$\Rightarrow)$ $\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0$ s.t. $\forall n>N,\ |S_n-S_{N-1}|=\left|\sum\limits_{k=n}^{N}u_k\right|<\varepsilon\Rightarrow\{S_n\}$ 收敛 $\Rightarrow\sum u_n$ 收敛

$\Leftarrow)$ $\sum u_n$ 收敛 $\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N_1>0$ s.t. $\forall m>N,\ p\in\mathbb{Z}^+$ s.t. $\left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p}u_n\right|<\varepsilon$

$\Rightarrow\exists N=N_1+1$ s.t. $\forall n>N,\ \left|\sum\limits_{k=N}^{n}u_k\right|<\varepsilon$

9. 令 $u_n=\frac{1}{n}$

则 $\forall p\in\mathbb{Z}^+,\ \sum\limits_{k=1}^{p}u_{n+k}<p\cdot u_n=\frac{p}{n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{p}u_{n+k}=0$

而 $\sum\frac{1}{n}$ 发散

10. 记 $\lim\limits_{k\to+\infty}\{S_{n_k}\}=S\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists K>0$ s.t. $\forall k>K,\ |S_k-S|<\varepsilon$

由题设易知, $\forall n,\ \exists k$ s.t. $n_k\le n\le n_{k+1}$ 且 $\min\{S_{n_k},S_{n_{k+1}}\}\le S_n\le\max\{S_{n_k},S_{n_{k+1}}\}$

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N>n_{[K]+1}$ s.t. $\forall n>N,\ |S_n-S|<\varepsilon\Rightarrow\sum u_n$ 收敛

习 题 12.2

1. 应用比较原则判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum \frac{1}{n^2+a^2}$; (2) $\sum 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$;

(3) $\sum \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$; (4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$;

(5) $\sum \left(1-\cos \frac{1}{n}\right)$; (6) $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

(7) $\sum (\sqrt[n]{a}-1)$ $(a>1)$; (8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^{\ln n}}$;

(9) $\sum (a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)$ $(a>0)$; (10) $\sum \frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$.

2. 用比式判别法或根式判别法讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum \frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!}$; (2) $\sum \frac{(n+1)!}{10^n}$;

(3) $\sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; (4) $\sum \frac{n!}{n^n}$;

(5) $\sum \frac{n^2}{2^n}$;

(6) $\sum \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ （其中 $a_n \to a$ $(n\to\infty)$，$a_n, b, a>0$，且 $a\neq b$）.

3. 设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 为正项级数，且存在正数 N_0，对一切 $n>N_0$，有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

证明：若级数 $\sum v_n$ 收敛，则级数 $\sum u_n$ 也收敛；若 $\sum u_n$ 发散，则 $\sum v_n$ 也发散.

4. 设正项级数 $\sum a_n$ 收敛，证明 $\sum a_n^2$ 亦收敛；试问反之是否成立？

5. 设 $a_n \geqslant 0$，$n=1,2,\cdots$. 且 $\{na_n\}$ 有界，证明 $\sum a_n^2$ 收敛.

6. 设级数 $\sum a_n^2$ 收敛，证明 $\sum \frac{a_n}{n}$ $(a_n>0)$ 也收敛.

7. 设正项级数 $\sum u_n$ 收敛，证明级数 $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ 也收敛.

8. 利用级数收敛的必要条件，证明下列等式：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}=0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{a^{n!}}=0$ $(a>1)$.

9. 用积分判别法讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum \frac{1}{n^2+1}$; (2) $\sum \frac{n}{n^2+1}$;

(3) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)}$; (4) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$.

10. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum \frac{n-\sqrt{n}}{2n-1}$; (2) $\sum \frac{1}{1+a^n}$ $(a>1)$;

(3) $\sum \frac{n\ln n}{2^n}$; (4) $\sum \frac{n!\,2^n}{n^n}$;

(5) $\sum \frac{n!\,3^n}{n^n}$; (6) $\sum \frac{1}{3^{\ln n}}$;

(7) $\sum \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ $(x>0)$.

11. 设 $\{a_n\}$ 为递减正项数列，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum 2^m a_{2^m}$ 同时收敛或同时发散.

12. 用拉贝判别法判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum \frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot (2n)}\cdot\frac{1}{2n+1}$; (2) $\sum \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ $(x>0)$.

13. 用根式判别法证明级数 $\sum 2^{-n-(-1)^n}$ 收敛，并说明比式判别法对此级数无效.

14. 求下列极限（其中 $p>1$）：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p^{n+1}}+\frac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}}\right)$.

15. 设 $a_n>0$，证明数列 $\{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\}$ 与级数 $\sum a_n$ 同时收敛或同时发散.

1.

(1) $\frac{1}{n^2} \geqslant \frac{1}{n^2+a^2} > 0$

$\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum \frac{1}{n^2+a^2}$ 收敛

(2) $\pi\cdot(\frac{2}{3})^n = 2^n\cdot\frac{\pi}{3^n} \geqslant 2^n \sin\frac{\pi}{3^n} > 0$

$\sum \pi\cdot(\frac{2}{3})^n$ 收敛 $\Rightarrow \sum 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$ 收敛

(3) $\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+2n+n^2}} = \frac{1}{n+1} > 0$

$\sum \frac{1}{n+1}$ 发散 $\Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ 发散

(4) 当 $n>e^e$ 时，$(\ln n)^n = e^{n\ln(\ln n)} > e^n \Rightarrow \frac{1}{e^n} > \frac{1}{(\ln n)^n} > 0$

$\sum \frac{1}{e^n}$ 收敛 $\Rightarrow \sum \frac{1}{(\ln n)^n}$ 收敛

(5) $\frac{1}{2n^2} = 1-(1-\frac{1}{2n^2}) \geqslant 1-\cos\frac{1}{n} > 0$

$\sum \frac{1}{2n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum(1-\cos\frac{1}{n})$ 收敛

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1 \Rightarrow \exists N>0$ s.t. $\forall n>N$, $\sqrt[n]{n}<2 \Rightarrow \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} > \frac{1}{2n} > 0$

$\sum \frac{1}{2n}$ 发散 $\Rightarrow \sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 发散

(7) $a^{\frac{1}{n}}-1 \geqslant (1+\frac{\ln a}{n})-1 = \frac{\ln a}{n} > 0$

$\sum \frac{\ln a}{n}$ 发散 $\Rightarrow \sum(\sqrt[n]{a}-1)$ 发散

(8) 当 $n>e^{e^3}$ 时 $(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n\ln(\ln n)} = n^{\ln(\ln n)} > n^3 \Rightarrow \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^3} > \frac{n}{(\ln n)^{\ln n}} > 0$

$\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum \frac{n}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛

(9) $a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2 = a^{-\frac{1}{n}}(a^{\frac{1}{n}}-1)^2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^{-\frac{1}{n}}(a^{\frac{1}{n}}-1)^2}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} a^{-\frac{1}{n}}\cdot \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)^2 = (\ln a)^2$

$\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)$ 收敛

(10) $\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} < 1 \Rightarrow \frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}} < \frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum \frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$ 收敛

2.

(1) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)n}{(2n-1)(n+1)} = \frac{2n^2+n}{2n^2+n-1} > 1 \Rightarrow \sum \frac{(2n-1)!!}{n!}$ 发散

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+2}{10} = +\infty \Rightarrow \sum \frac{(n+1)!}{10^n}$ 发散

(3) $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2} \Rightarrow \sum(\frac{n}{2n+1})^n$ 收敛

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n+1})^n = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \sum \frac{n!}{n^n}$ 收敛

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot(\frac{n+1}{n})^2 = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum \frac{n^2}{2^n}$ 收敛

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b}{a_n} = \frac{b}{a}$

当 $a>b$ 时，$\frac{b}{a}<1 \Rightarrow \sum(\frac{b}{a_n})^n$ 收敛

当 $a<b$ 时，$\frac{b}{a}>1 \Rightarrow \sum\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ 发散

3. $\exists N_0$ s.t. $\forall n>N_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \le \frac{u_n}{v_n} \le \cdots \le \frac{u_1}{v_1} \Rightarrow u_n \le \frac{u_1}{v_1}\cdot v_n$, $v_n \ge \frac{v_1}{u_1}\cdot u_n$

若 $\sum v_n$ 收敛，则 $\sum \frac{u_1}{v_1}\cdot v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum u_n$ 收敛

若 $\sum u_n$ 发散，则 $\sum \frac{v_1}{u_1}\cdot u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum v_n$ 发散

4.

(1) $\sum a_n$ 收敛 $\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N>0, \forall m>N, p\in\mathbb{Z}^+, \left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n\right| < \sqrt{\varepsilon}$

$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n^2\right| \le \left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n\right|^2 < \varepsilon$ ，即证.

(2) 反之不成立，令 $a_n=\frac{1}{n}$，则 $\sum a_n^2$ 收敛，$\sum a_n$ 发散

5. $\{na_n\}$ 有界 $\Rightarrow \exists M>0$ s.t. $\forall n\in N^+$, $na_n<M \Rightarrow a_n<\frac{M}{n} \Rightarrow a_n^2<\frac{M^2}{n^2}$

$\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum\frac{M^2}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum a_n^2$ 收敛

6. $\sum a_n^2$ 收敛 $\Rightarrow \sum \frac{1}{2}(a_n^2+\frac{1}{n^2})$ 收敛

$\frac{1}{2}(a_n^2+\frac{1}{n^2}) \ge \frac{a_n}{n}>0 \Rightarrow \sum\frac{a_n}{n}$ 收敛

7. $\sum u_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum\frac{1}{2}(u_n+u_{n+1})$ 收敛

$\frac{1}{2}(u_n+u_{n+1}) \ge \sqrt{u_nu_{n+1}} \Rightarrow \sum\sqrt{u_nu_{n+1}}$ 收敛

8.

(1) 设 $u_n=\frac{n^n}{(n!)^2}$ ，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=0$

$\Rightarrow \sum\frac{n^n}{(n!)^2}$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$

(2) 令 $u_n=\frac{(2n)!}{a^{n!}}$ ，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n^2+6n+2}{a^{n+1}}=0$

$\Rightarrow \sum\frac{(2n)!}{a^{n!}}$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0$

9.

(1) 令 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ ，则 f 在 $[1,+\infty)\searrow$

$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{u\to+\infty}\int_1^u\frac{1}{x^2+1}dx=\lim\limits_{u\to+\infty}(\arctan u-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sum\frac{1}{n^2+1}$ 收敛

(2) 令 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$，则 f 在 $[\sqrt{2},+\infty)\searrow$

$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{u\to+\infty}\int_1^u\frac{x}{x^2+1}dx=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u}{2}\right|=+\infty \Rightarrow \sum\frac{n}{n^2+1}$ 发散

(3) 令 $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)(\ln\ln x)}$ ，则 f 在 $[3,+\infty)\searrow$

$\int_3^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{u\to+\infty}\int_3^u\frac{1}{x(\ln x)(\ln\ln x)}dx=\lim\limits_{u\to+\infty}(\ln\ln\ln u-\ln\ln\ln 3)=+\infty \Rightarrow \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)(\ln\ln x)}$ 发散

(4) (i) 当 $p>1$ 时，$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$ 收敛

(ii) 当 $p<1$ 时，$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$ 发散

(iii) 当 $p=1, q\le1$ 时，$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$ 收敛

(iv) 当 $p=1, q>1$ 时，$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$ 发散

10.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{2n-1}=\frac{1}{2} \Rightarrow \sum\frac{n-\sqrt{n}}{2n-1}$ 发散

(2) $\frac{1}{a^n}>\frac{1}{1+a^n}>0$

$\sum\frac{1}{a^n}$ 收敛 $\Rightarrow \sum\frac{1}{1+a^n}$ 收敛

(3) 令 $u_n=\frac{n^2}{2^n}$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{2} \Rightarrow \sum\frac{n^2}{2^n}$ 收敛

$\frac{n^2}{2^n}>\frac{n\ln n}{2^n}>0 \Rightarrow \sum\frac{n\ln n}{2^n}$ 收敛

(4) 令 $u_n=\frac{n!2^n}{n^n}$ ，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{2}{e}<1 \Rightarrow \sum\frac{n!2^n}{n^n}$ 收敛

(5) 令 $u_n=\frac{n!3^n}{n^n}$ ，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{3}{e}>1 \Rightarrow \sum\frac{n!3^n}{n^n}$ 发散

(6) $\frac{1}{3^{\ln n}}=\frac{1}{n^{\ln 3}}$

$\ln 3>1 \Rightarrow \sum\frac{1}{n^{\ln 3}}$ 收敛 $\Rightarrow \sum\frac{1}{3^{\ln n}}$ 收敛

(7) 令 $u_n=\frac{x^n}{\prod_{k=1}^{n}(1+x^k)}$ ，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x}{1+x^{n+1}}=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ \frac{1}{2}, & x=1\\ 0, & x>1\end{cases} \Rightarrow \sum\frac{x^n}{\prod_{k=1}^{n}(1+x^k)}$ 收敛

11. 记 $b_n=2^na_{2^n}$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_n$, $T_n=\sum_{k=1}^{n}b_n$

(1) 若 $\sum a_n$ 收敛，则 $\{S_{2^n}\}$ 收敛

$\forall n\in N^+,\ a_{n+1}\le a_n \Rightarrow S_{2^n}\ge \frac{1}{2}T_n$ $\quad a_1+a_2+(a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)\geqslant a_1+a_2+2a_4+4a_8\geqslant a_2+2a_4+4a_8=\frac{1}{2}T_3$

$\Rightarrow \sum b_n$ 收敛

由逆否命题可知：若 $\sum b_n$ 发散，则 $\sum a_n$ 发散

(2) 若 $\sum a_n$ 发散，则 $\{S_{2^{n+1}}\}$ 发散

不妨令 $b_1=a_1+a_2+2a_2$

$\forall n\in N^+,\ a_{n+1}\le a_n \Rightarrow S_{2^{n+1}}\le T_n$ $\quad a_1+a_2+(a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)\leqslant a_1+a_2+2a_2+4a_4=T_2$

$\Rightarrow \sum b_n$ 发散

由逆否命题可知：若 $\sum b_n$ 收敛，则 $\sum a_n$ 收敛

12. 略

13. 记 $u_n=2^{-n-(-1)^n}$

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}2^{-1-\frac{(-1)^n}{n}}=\frac{1}{2}\Rightarrow \sum 2^{-n-(-1)^n}$ 收敛

(2) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=2^{(-1)^n-(-1)^{n+1}-1}$，其极限不存在.

故无法用比式判别法判别.

14.

(1) 当 $p>1$ 时，$\sum\frac{1}{n^p}$ 收敛.

记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$

故原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n}-S_n)=S-S=0$

(2) 当 $p>1$ 时，$\sum\frac{1}{p^n}$ 收敛.

记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{p^k}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$

故原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n}-S_n)=S-S=0$

15.

(1) 若 $\sum a_k$ 发散，则 $\{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\}$ 发散

$\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)>\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\Rightarrow\{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)\}$ 发散

由逆否命题可知：若 $\{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)\}$ 收敛，则 $\sum a_n$ 收敛

(2) 若 $\sum a_k$ 收敛

$a_n\geqslant \ln(1+a_n)\Rightarrow\sum\ln(1+a_n)$ 收敛

$\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+a_k)=\ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)\right)\Rightarrow\{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)\}$ 收敛

习 题 12.3

1. 下列级数哪些是绝对收敛、条件收敛或发散的：

(1) $\sum \frac{\sin nx}{n!}$；　(2) $\sum (-1)^n \frac{n}{n+1}$；

(3) $\sum \frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$；　(4) $\sum (-1)^n \sin \frac{2}{n}$；

(5) $\sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$；　(6) $\sum \frac{(-1)^n \ln(n+1)}{n+1}$；

(7) $\sum (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$；　(8) $\sum n! \left(\frac{x}{n} \right)^n$；

(9) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$；　(10) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$.

2. 应用阿贝尔判别法或狄利克雷判别法判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{1+x^n}$　$(x>0)$；

(2) $\sum \frac{\sin nx}{n^\alpha}, x \in (0, 2\pi)$　$(\alpha>0)$；

(3) $\sum (-1)^n \frac{\cos^2 n}{n}$.

3. 设 $a_n>0, a_n>a_{n+1}$　$(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. 证明级数

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

是收敛的.

---

4. 设 p_n, q_n 如(8)式所定义. 证明：若 $\sum u_n$ 条件收敛，则级数 $\sum p_n$ 与 $\sum q_n$ 都是发散的.

5. 写出下列级数的乘积：

(1) $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right) \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n-1} \right)$；　(2) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \right) \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \right)$.

6. 证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}$ 绝对收敛，且它们的乘积等于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}$.

7. 重排级数 $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$，使它成为发散级数.

8. 证明：级数 $\sum \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

1.

(1) 当 $n \geq 4$ 时，$n! > n^2 \Rightarrow \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n!} > 0$

$\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum \frac{1}{n!}$ 收敛

$\frac{1}{n!} \geq \left| \frac{\sin nx}{n!} \right| > 0 \Rightarrow \sum \left| \frac{\sin nx}{n!} \right|$ 收敛

故 $\sum \frac{\sin nx}{n!}$ 绝对收敛

(2) 记 $a_n = (-1)^{2n-1}\left(1-\frac{1}{2n}\right) + (-1)^{2n}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{(2n)(2n+1)}$

$\frac{1}{n^2} > \frac{1}{(2n)(2n+1)} > 0$ 且 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum a_n$ 收敛，即 $\sum (-1)^n \frac{n}{n+1}$ 收敛

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left| (-1)^n \frac{n}{n+1} \right| = 1 \Rightarrow \sum \left| (-1)^n \frac{n}{n+1} \right|$ 发散

综上，$\sum (-1)^n \frac{n}{n+1}$ 条件收敛.

(3) (i) 当 $p<0$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}} = +\infty \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 发散

(ii) 当 $p=0$ 时，$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{n}}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 发散

(iii) 当 $p>0$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|u_n|}{n^{-p}} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{1}{n}} = 1$

(a) 当 $p>1$ 时，$\sum \frac{1}{n^p}$ 收敛 $\Rightarrow \sum |u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum u_n$ 绝对收敛

(b) 当 $0<p\leq 1$ 时，$\sum \frac{1}{n^p}$ 发散 $\Rightarrow \sum |u_n|$ 发散

$u_n = (-1)^n \cdot n^{-p} \cdot n^{-\frac{1}{n}}$，$\{n^{-p}\}$ 单减且 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-p} = 0$，$\sum n^{-\frac{1}{n}}$ 收敛

由 Dirichlet 判别法，$\sum u_n$ 收敛

综上，$\sum u_n$ 条件收敛

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} = 1$，$\sum \frac{2}{n}$ 发散 $\Rightarrow \sum |u_n| = \sum \sin\frac{2}{n}$ 发散

$\{\sin\frac{2}{n}\}$ 单减，$\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{2}{n} = 0$

由 Leibniz 判别法，$\sum u_n = \sum (-1)^n \sin\frac{n}{2}$ 收敛

综上，$\sum (-1)^n \sin\frac{2}{n}$ 条件收敛

(5) $\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} > \frac{1}{n} > 0$，$\sum \frac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow \sum |u_n| = \sum \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)$ 发散

$\left\{\frac{\sqrt{n}-1}{n}\right\}$ 单减，$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{n} = 0$

由 Leibniz 判别法，$\sum u_n = \sum (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n}-1}{n}$ 收敛

综上，$\sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)$ 条件收敛

(6) $\frac{\ln(n+1)}{n+1} > \frac{1}{n+1} > 0$，$\sum \frac{1}{n+1}$ 发散 $\Rightarrow \sum |u_n| = \sum \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ 发散

$\left\{\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right\}$ 单减，$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} = 0$

由 Leibniz 判别法，$\sum u_n = \sum \frac{(-1)^n \ln(n+1)}{n+1}$ 收敛

综上，$\sum \frac{(-1)^n \ln(n+1)}{n+1}$ 条件收敛

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|u_n|}{(\frac{2}{3})^n} = 1$，$\sum (\frac{2}{3})^n$ 收敛 $\Rightarrow \sum |u_n| = \sum \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ 收敛

故 $\sum (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ 绝对收敛

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|x|}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{|x|}{e}$

(i) 当 $x\in(-e,e)$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}<1\Rightarrow\sum|u_n|$ 收敛

故 $\sum n!(\frac{x}{n})^n$ 绝对收敛

(ii) 当 $x\in(-\infty,-e)\cup(e,+\infty)$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}>1\Rightarrow\sum|u_n|$ 发散

由保号性，$\exists N>0$ s.t. $\forall n>N$, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}>1\Rightarrow\{|u_n|\}$ 单增 $\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|\neq0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\neq0$

故 $\sum n!(\frac{x}{n})^n$ 发散

(iii) 当 $x=\pm e$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=1$

$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单增 $\Rightarrow\{\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\}$ 单减 $\Rightarrow\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}>1$

由 (ii) 可知，$\sum n!(\frac{x}{n})^n$ 发散

(9) $\sum|u_n|=\sum\frac{1}{n}$ 发散

记 $v_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}=\frac{3}{n^2+3n}$

$\frac{3}{n^2}>\frac{3}{n^2+3n}>0$，$\sum\frac{3}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow\sum v_n$ 收敛

$\forall k\in\mathbb{Z}^+$，$\sum\limits_{i=6k-5}^{6k}u_i=\sum\limits_{i=6k-5}^{6k-3}v_i\Rightarrow\sum u_n$ 收敛

故 $\sum u_n$ 条件收敛

(10) 记 $v_n=u_{3n-2}+u_{3n-1}+u_{3n}=\frac{n^2+4n+2}{n^3+3n^2+2n}$，则 $\sum u_n=\sum v_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{\frac{1}{n}}=1$，$\sum\frac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow\sum u_n$ 发散

故 $\sum u_n$ 发散

2.

(1) $\{\frac{1}{n}\}$ 单减，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

由 Leibniz 判别法，$\sum\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

(i) 当 $x\geq1$ 时，$\{\frac{x^n}{1+x^n}\}$ 单增，且 $\frac{x^n}{1+x^n}\leq1$

由 Abel 判别法，$\sum\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{x^n}{1+x^n}$ 收敛

(ii) 当 $x<1$ 时，$\{\frac{x^n}{1+x^n}\}$ 单减，且 $\frac{x^n}{1+x^n}<1$

由 Abel 判别法，$\sum\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{x^n}{1+x^n}$ 收敛

(2) $\{\frac{1}{n^\alpha}\}$ 单减，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$

$\sum\sin nx=\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\leq\frac{\cos\frac{1}{2}x+1}{2\sin\frac{x}{2}}$

由 Dirichlet 判别法，$\sum\frac{\sin nx}{n^\alpha}$ 收敛

(3) $(-1)^n\frac{\cos^2n}{n}=(-1)^n\frac{1+\cos2n}{2n}=\frac{(-1)^n}{2n}+(-1)^n\frac{\cos2n}{2n}$

$\{\frac{1}{2n}\}$ 单减，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0$

由 Leibniz 判别法，$\sum\frac{(-1)^n}{2n}$ 收敛

$\sum(-1)^n\cos2x=\frac{(-1)^n\cos(2n+1)-\cos1}{2\cos1}\leq\frac{1-\cos1}{2\cos1}$

由 Dirichlet 判别法，$\sum(-1)^n\frac{\cos2n}{2n}$ 收敛

综上，$\sum(-1)^n\frac{\cos^2n}{n}$ 收敛

3. $a_n>a_{n+1}\Rightarrow\{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_n\}$ 单减

$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_n=0$

由 Leibniz 判别法，$\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_n$ 收敛

4. $\sum p_n=\frac{1}{2}\sum|u_n|+\frac{1}{2}\sum u_n$，$\sum q_n=\frac{1}{2}\sum|u_n|-\frac{1}{2}\sum u_n$

$\sum u_n$ 条件收敛 $\Rightarrow\sum u_n=S$，$\sum|u_n|$ 发散

故 $\sum p_n$，$\sum q_n$ 均发散

5.

(1) (i) 当 $x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty\Rightarrow\sum u_n$ 发散

(ii) 当 $x\in(-1,1)$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}|x|=|x|<1$

$\Rightarrow \sum |u_n|$ 收敛，即 $\sum u_n$ 绝对收敛 $\Rightarrow \sum (-1)^n u_n$ 绝对收敛

此时，$a_n = \begin{cases} 0, & n=2k \\ kx^{2k-2}, & n=2k-1 \end{cases}$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \sum \dfrac{1}{n!}, \sum \dfrac{(-1)^n}{n!}$ 绝对收敛

$(\sum u_n)(\sum |u_n|) = \sum a_n = u_0 v_0 = 1$

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a|}{n+1} = 0 \Rightarrow \sum \dfrac{a^n}{n!}$ 绝对收敛

同理 $\sum \dfrac{b^n}{n!}$ 绝对收敛

记 $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k b^{n-k}}{k!(n-k)!} = \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \dfrac{(a+b)^n}{n!}$

$(\sum \dfrac{a^n}{n!})(\sum \dfrac{b^n}{n!}) = \sum a_n = \sum \dfrac{(a+b)^n}{n!}$

7. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ 重排得 $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$

记 $u_n = \dfrac{1}{4n-3} + \dfrac{1}{4n-1} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{32n^2 - 24n + 3}{32n^3 - 32n^2 + 6n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\frac{1}{n}} = 1$，$\sum \frac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow \sum u_n$ 发散

8. 记 $a_k = \sum\limits_{i=k^2}^{k^2+2k} \frac{1}{i}$

$a_k = \sum\limits_{i=k^2}^{k^2+k-1} \frac{1}{i} + \sum\limits_{i=k^2+k}^{k^2+2k} \frac{1}{i} < \dfrac{k}{k^2} + \dfrac{k+1}{k^2+k} = \dfrac{2}{k}$

$a_k = \sum\limits_{i=k^2}^{k^2+k-1} \frac{1}{i} + \sum\limits_{i=k^2+k}^{k^2+2k} \frac{1}{i} > \dfrac{k}{k^2+k-1} + \dfrac{k+1}{k^2+2k} > \dfrac{k}{k^2+k} + \dfrac{k+1}{k^2+2k+1} = \dfrac{2}{k+1}$

$\Rightarrow a_k > \dfrac{2}{k+1} > a_{k+1}$

又由迫敛性得 $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 0$

故由Leibniz判别法得 $\sum \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} = \sum (-1)^n a_k$ 收敛

第十二章总练习题

1. 证明：若正项级数 $\sum u_n$ 收敛，且数列 $\{u_n\}$ 单调，则 $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n=0$.

2. 若级数 $\sum a_n$ 与 $\sum c_n$ 都收敛，且成立不等式

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \quad (n=1,2,\cdots),$$

证明级数 $\sum b_n$ 也收敛. 若 $\sum a_n$，$\sum c_n$ 都发散，试问 $\sum b_n$ 一定发散吗？

3. 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(0<x<2\pi, p>0)$ 的收敛性.

4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\neq 0$，且级数 $\sum b_n$ 绝对收敛，证明级数 $\sum a_n$ 也收敛. 若上述条件中只知道 $\sum b_n$ 收敛，能推得 $\sum a_n$ 收敛吗？

5. (1) 设 $\sum u_n$ 为正项级数，且 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$，能否断定 $\sum u_n$ 收敛？

(2) 对于级数 $\sum u_n$ 有 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$，能否断定级数 $\sum u_n$ 不绝对收敛，但可能条件收敛？

(3) 设 $\sum u_n$ 为收敛的正项级数，能否存在一个正数 ε，使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}}=c>0?$$

6. 证明：若级数 $\sum a_n$ 收敛，$\sum(b_{n+1}-b_n)$ 绝对收敛，则级数 $\sum a_nb_n$ 也收敛.

7. 设 $a_n>0$，证明级数

$$\sum\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

是收敛的.

8. 证明：若级数 $\sum a_n^2$ 与 $\sum b_n^2$ 收敛，则级数 $\sum a_nb_n$ 和 $\sum(a_n+b_n)^2$ 也收敛，且

$$\left(\sum a_nb_n\right)^2 \leqslant \sum a_n^2\cdot\sum b_n^2,$$

$$\left(\sum(a_n+b_n)^2\right)^{\frac12} \leqslant \left(\sum a_n^2\right)^{\frac12}+\left(\sum b_n^2\right)^{\frac12}.$$

1. $\sum u_n$ 收敛，$\{u_n\}$ 单调 $\Rightarrow \{u_n\}$ 单减，$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} na_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=0$，否则 $\sum a_n$ 发散，即证.

2.

(1) $\sum a_n$，$\sum c_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum(c_n-a_n)$ 收敛

$a_n\leq b_n\leq c_n \Rightarrow c_n-a_n\geq b_n-a_n\geq 0 \Rightarrow \sum(b_n-a_n)$ 收敛

$\sum b_n=\sum[(b_n-a_n)+a_n] \Rightarrow \sum b_n$ 收敛

(2) $a_n=-\frac{1}{n}$，$b_n=0$，$c_n=\frac{1}{n} \Rightarrow \sum a_n$，$\sum c_n$ 发散，$\sum b_n$ 收敛

3. $\sum\frac{\sin nx}{n^p}$ 收敛

$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单增，$\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

由Abel判别法，$\sum\frac{\sin nx}{n^p}(1+\frac{1}{n})^n$ 收敛

4.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{|b_n|}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right|=|k|$，$\sum|b_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum|a_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum a_n$ 收敛

(2) 令 $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$，$b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$

$\sum a_n$ 发散，$\sum b_n$ 收敛

5.

(1) 令 $u_n=\frac{1}{n}$，则 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n}{n+1}<1$，$\sum u_n$ 发散

(2) $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\geq 1 \Rightarrow |u_n|\geq|u_1|>0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|\neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}u_n\neq 0 \Rightarrow \sum u_n$ 不收敛

(3) 令 $u_n=\frac{1}{n^n}$，则 $\sum u_n$ 收敛

但 $\forall\varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n^{-(1+\varepsilon)}}=\lim\limits_{n\to+\infty}n^{-n+1+\varepsilon}=0$

6. $\sum a_n$ 收敛 $\Rightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists N_1>0$ s.t. $\forall n>N_1$，$p\in\mathbb{Z}^+$，$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon$

$\sum(b_{n+1}-b_n)$ 绝对收敛 $\Rightarrow \{\sum\limits_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)\}$ 收敛 $\Rightarrow \{b_n\}$ 有界 $\Rightarrow \exists M>0$，$|b_n|<M$

由Abel变换，令 $N=\max\{N_1,N_2\}$，$\forall n>N$，$p\in\mathbb{Z}^+$，$\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p}a_kb_k\right|=\left|\sum\limits_{i=n}^{n+p-1}\left((b_{i+1}-b_i)\sum\limits_{j=n}^{i}a_j\right)+b_{n+p}\sum\limits_{j=n}^{n+p}a_j\right|\leq\sum\limits_{i=n}^{n+p-1}\left(|b_{i+1}-b_i|\left|\sum\limits_{j=n}^{i}a_j\right|\right)+|b_{n+p}|\left|\sum\limits_{j=n}^{n+p}a_j\right|\leq(\varepsilon+M)\varepsilon$

由Cauchy准则，$\sum a_nb_n$ 收敛

7. $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}\right]=\frac{1}{1+a_1}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}<1$，$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}\right\}$ 单增

由单调有界定理，$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}\right\}$ 收敛

故 $\sum\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$ 收敛

8.

(1) $|a_nb_n|\leq\frac{(a_n^2+b_n^2)}{2}$，$\sum a_n^2$，$\sum b_n^2$ 收敛 $\Rightarrow \sum|a_nb_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum a_nb_n$ 收敛

$(a_n+b_n)^2=a_n^2+b_n^2+2a_nb_n \Rightarrow \sum(a_n+b_n)^2$ 收敛

(2) 由Cauchy-Schwarz不等式得 $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leq\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^2\right) \Rightarrow \left(\sum a_nb_n\right)^2\leq\left(\sum a_n^2\right)\left(\sum b_n^2\right)$

由Minkowski不等式得 $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2\right)^{\frac12}\leq\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac12}+\left(\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac12} \Rightarrow \left(\sum(a_n+b_n)^2\right)^{\frac12}\leq\left(\sum a_n^2\right)^{\frac12}+\left(\sum b_n^2\right)^{\frac12}$

习 题 13.1

1. 讨论下列函数列在所示区间 D 上是否一致收敛或内闭一致收敛,并说明理由:

(1) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$, $n=1,2,\cdots$, $D=(-1,1)$;

(2) $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$, $n=1,2,\cdots$, $D=(-\infty,+\infty)$;

(3) $f_n(x)=\begin{cases}-(n+1)x+1, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n+1},\\ 0, & \frac{1}{n+1}<x<1,\end{cases}$ $n=1,2,\cdots$;

(4) $f_n(x)=\frac{x}{n}$, $n=1,2,\cdots$, $D=[0,+\infty)$;

(5) $f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$, $n=1,2,\cdots$, $D=(-\infty,+\infty)$.

2. 证明:设 $f_n(x)\to f(x)$, $x\in D$, $a_n\to 0$ $(n\to\infty)$ $(a_n>0)$. 若对每一个正整数 n 有 $|f_n(x)-f(x)|\leqslant a_n$, $x\in D$, 则 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f.

3. 判别下列函数项级数在所示区间上的一致收敛性:

(1) $\sum\frac{x^n}{(n-1)!}$, $x\in[-r,r]$;

(2) $\sum\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(3) $\sum\frac{n}{x^n}$, $|x|>r\geqslant 1$;

(4) $\sum\frac{x^n}{n^2}$, $x\in[0,1]$;

(5) $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(6) $\sum\frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

4. 设函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$, 函数 $g(x)$ 在 D 上有界. 证明级数 $\sum g(x)u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $g(x)S(x)$.

5. 若在区间 I 上,对任何正整数 n,

$$|u_n(x)|\leqslant v_n(x),$$

证明当 $\sum v_n(x)$ 在 I 上一致收敛时,级数 $\sum u_n(x)$ 在 I 上也一致收敛.

6. 设 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数. 证明:若 $\sum u_n(a)$ 与 $\sum u_n(b)$ 都绝对收敛,则 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对且一致收敛.

7. 证明:$\{f_n\}$ 在区间 I 上内闭一致收敛于 f 的充分且必要条件是:对任意 $x_0\in I$, 存在 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$, 使得 $\{f_n\}$ 在 $U(x_0)\cap I$ 上一致收敛于 f.

8. 在 $[0,1]$ 上定义函数列

$$u_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{1}{n},\\ 0, & x\neq\frac{1}{n},\end{cases}\quad n=1,2,\cdots,$$

证明级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛,但它不存在优级数.

9. 讨论下列函数列或函数项级数在所示区间 D 上的一致收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1-2n}{(x^2+n^2)[x^2+(n-1)^2]}$, $D=[-1,1]$;

(2) $\sum 2^n\sin\frac{x}{3^n}$, $D=(0,+\infty)$;

(3) $\sum\frac{x^2}{[1+(n-1)x^2](1+nx^2)}$, $D=(0,+\infty)$;

(4) $\sum\frac{x^n}{\sqrt{n}}$, $D=[-1,0]$;

(5) $\sum(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $D=(-1,1)$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, $D=(0,2\pi)$.

10. 证明:级数 $\sum(-1)^nx^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对收敛并一致收敛,但由其各项绝对值组成的级数在 $[0,1]$ 上却不一致收敛.

11. 设 f 为定义在区间 (a,b) 内的任一函数,记

$$f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n},\quad n=1,2,\cdots,$$

证明函数列 $\{f_n\}$ 在 (a,b) 内一致收敛于 f.

12. 设 $\{u_n(x)\}$ 为 $[a,b]$ 上正的递减且收敛于零的函数列,每一个 $u_n(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的单调函数,则级数

$$u_1(x)-u_2(x)+u_3(x)-u_4(x)+\cdots$$

在 $[a,b]$ 上不仅收敛,而且一致收敛.

13. 证明:若 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于 0, 则存在子列 $\{f_{n_i}\}$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}f_{n_i}(x)$ 在 I 上一致收敛.

1.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}=\sqrt{x^2}$

记 $f(x)=\sqrt{x^2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in(-1,1)}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in(-1,1)}\frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{x^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}=0$

故 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ $(n\to+\infty)$ $x\in(-1,1)$

(2) $\forall x\in[\alpha,\beta]\subseteq D$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}=0$

记 $f(x)=0$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]}\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|=0$

故 $f_n(x)$ 在 D 上内闭一致收敛

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & 0<x<1\end{cases}$

令 $f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & 0<x<1\end{cases}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0,1)}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to+\infty,\,x\to0^+}|f_n(x)-f(x)|=1$

故 $f_n(x)$ 在 D 上不一致收敛,不内闭一致收敛

(4) $\forall x\in[0,\beta]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=0$

令 $f(x)=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0,\beta]}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\beta}{n}=0$

故 $f(x)$ 在 D 上内闭一致收敛

(5) $\forall x\in[\alpha,\beta]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=0$

令 $f(x)=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to+\infty}\max\left\{\left|\sin\frac{\alpha}{n}\right|,\left|\sin\frac{\beta}{n}\right|\right\}=0$

故 $f(x)$ 在 D 上内闭一致收敛

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0\Rightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ s.t. $\forall n>N$, $|a_n-0|<\varepsilon$

$|f_n(x)-f(x)|\le a_n \Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N\ s.t.\ \forall n>N,\ x\in D,\ |f_n(x)-f(x)|\le a_n\le|a_n|<\varepsilon$

故 f_n 在 D 上一致收敛于 f.

3.

(1) 令 $M_n=\frac{r^n}{(n-1)!}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{M_{n+1}}{M_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{r}{n}=0\Rightarrow\sum M_n$ 收敛

$\forall x\in[-r,r]$，$\left|\frac{x^n}{(n-1)!}\right|\le M_n$

由 Weierstrass 判别法得，$\sum\frac{x^n}{(n-1)!}$ 在 $[-r,r]$ 上一致收敛

(2) (i) 当 $x=0$ 时，$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^2}{(1+x^2)^k}\equiv0$

(ii) 当 $x\ne0$ 时，

令 $M_n=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{M_{n+1}}{M_n}=\frac{1}{1+x^2}<1\Rightarrow\sum M_n$ 收敛

$\forall x\ne0$，$\left|\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}\right|\le M_n$

由 Weierstrass 判别法得，$\sum\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上一致收敛

综上，$\sum\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛

(3) 记 $M_n=\frac{n}{(\frac{r+|x|}{2})^n}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{M_{n+1}}{M_n}=\frac{2}{r+|x|}<1\Rightarrow\sum M_n$ 收敛

$\forall x$ 满足 $|x|>r\ge1$，$\left|\frac{n}{x^n}\right|\le M_n$

由 Weierstrass 判别法得，$\sum\frac{n}{x^n}$ 在 D 上一致收敛

(4) 令 $M_n=\frac{1}{n^2}$，$\sum M_n$ 收敛

$\forall x\in[0,1]$，$\left|\frac{x^n}{n^2}\right|\le M_n$

由 Weierstrass 判别法得，$\sum\frac{x^n}{n^2}$ 在 D 上一致收敛

(5) $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\right\}$ 有界

$\forall x$，$\left\{\frac{1}{x^2+n}\right\}$ 单减

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{x^2+n}-0\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0\Rightarrow\frac{1}{x^2+n}\rightrightarrows0\ (n\to+\infty)\ x\in\mathbb{R}$

由 Dirichlet 判别法得，$\sum\frac{(-1)^n}{x^2+n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛

(6) 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x^2}{(1+x^2)^{k-1}}$

(i) 当 $x=0$ 时，$S_n\equiv0$

(ii) 当 $x\ne0$ 时，$S_n=\frac{x^2\left(1-(\frac{1}{1+x^2})^n\right)}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1+x^2-\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=1+x^2$

令 $S(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1+x^2, & x\ne0\end{cases}$，则 $R_n(x)=S(x)-S_n(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}, & x\ne0\end{cases}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}R_n(x)=1\ne0\Rightarrow\sum\frac{x^2}{(1+x^2)^{k-1}}$ 不一致收敛

4. $\sum u_n(x)\rightrightarrows S(x)\ (n\to+\infty)\ x\in D\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0\ s.t.\ \forall n>N,\ x\in D,\ |u_n(x)-S(x)|<\varepsilon$

$g(x)$ 在 D 上有界 $\Rightarrow\exists M>0\ s.t.\ \forall x\in D,\ |g(x)|<M$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0\ s.t.\ \forall n>N,\ x\in D,\ |g(x)u_n(x)-g(x)S(x)|=|g(x)[u_n(x)-S(x)]|\le|g(x)||u_n(x)-S(x)|<M\varepsilon$

由 ε 的任意性得，$g(x)u_n(x)\rightrightarrows g(x)S(x)\ (n\to+\infty)\ x\in D$

5. $\sum v_n(x)$ 在 I 上一致收敛 $\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0\ s.t.\ \forall n>N,\ p\in\mathbb{Z}^+,\ x\in I,\ \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}v_k\right|<\varepsilon$

$\sum\varepsilon>0,\ \exists N>0\ s.t.\ \forall n>N,\ p\in\mathbb{Z}^+,\ x\in I,\ \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k\right|\le\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}|u_k|\le\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}v_k\le\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}v_k\right|<\varepsilon\Rightarrow\sum u_n(x)$ 在 I 上一致收敛

6. 不妨设 u_n 在 $[a,b]$ 上单增 $\Rightarrow\forall x\in[a,b]$，$u_n(a)\le u_n(x)\le u_n(b)\Rightarrow0<|u_n(x)|\le\max\{|u_n(a)|,|u_n(b)|\}$

$\sum|u_n(a)|$，$\sum|u_n(b)|$ 收敛 $\Rightarrow\forall x\in[a,b]$，$\sum|u_n(x)|$ 收敛

令 $M_n=|u_n(a)|+|u_n(b)|$，则 $\sum M_n$ 收敛

$\forall x\in[a,b]$，$|u_n(x)|\le M_n\Rightarrow\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛

7.

$\Rightarrow)$ $\forall x\in I$，$\exists\delta_x>0\ s.t.\ \{f_n\}$ 在 $U(x;\delta_x)$ 上一致收敛于 f

$\forall[a,b]\subseteq I$，令 $H=\{U(x;\delta_x)\mid x\in[a,b]\}$，则 H 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖

由有限覆盖定理得，存在有限个开区间 $\{U(x_i;\delta_{x_i})\mid i=1,2,\dots,n\}$ 覆盖 $[a,b]$

$\forall i\in\{1,2,\dots,n\}, \varepsilon>0, \exists N_i>0$ s.t. $\forall n>N_i, x\in U(x_i;\delta_{x_i})\cap I, |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N=\max\{N_1,N_2,\dots,N_n\}$ s.t. $\forall n>N_i, x\in(\bigcup_{i=1}^{n}U(x_i;\delta_{x_i}))\cap I, |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \Rightarrow \forall x\in[a,b], |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

故$\{f_n\}$在I上内闭一致收敛于f

$\Leftarrow)$ $U(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq[x_0-\delta,x_0+\delta]$，由$\delta$的任意性，总是存在$\delta>0$使得$[x_0-\delta,x_0+\delta]\subseteq I$

$\{f_n\}$在I上内闭一致收敛$\Rightarrow\{f_n\}$在$[x_0-\delta,x_0+\delta]$上一致收敛$\Rightarrow\{f_n\}$在$U(x_0)$上一致收敛

8. $\forall\varepsilon>0, \exists N=\frac{1}{\varepsilon}$ s.t. $\forall n>N, x\in[0,1], |\sum_{k=1}^{n}u_k(x)-0|<\varepsilon\Rightarrow\sum u_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛

假设存在优级数M_n

则$M_n\geq\sup_{x\in[0,1]}|u_n(x)|=\frac{1}{n}$

$\sum\frac{1}{n}$发散$\Rightarrow\sum M_n$发散，与M_n是优级数矛盾！

故不存在优级数M_n

9.

(1) $\forall x\in D, |u_n|<\frac{2}{(n-1)^3}$

$\sum\frac{2}{(n-1)^3}$收敛$\Rightarrow\sum u_n(x)$在D上一致收敛

(2) $\forall x\in D, |u_n|<(\frac{2}{3})^n x$

$\sum(\frac{2}{3})^n x$收敛$\Rightarrow\sum u_n(x)$在D上一致收敛

(3) (i) 当$x\in(0,1)$时，$\exists N=x^{-2}$ s.t. $\forall n>N, |u_n(x)|<\frac{1}{(n-1)^2}$

(ii) 当$x\geq1$时，$|u_n(x)|\leq\frac{1}{(n-1)^2}$

$\sum\frac{1}{(n-1)^2}$收敛$\Rightarrow\sum u_n(x)$在D上一致收敛

(4) $\sum\frac{x^n}{\sqrt{n}}=\sum(-1)^n\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}$

$\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\}$在D上一致有界

$\forall x\in D, \{\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}\}$单减

$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in D}|\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}-0|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0\Rightarrow\sum\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}\rightrightarrows0\ (n\to+\infty)\ x\in D$

由Dirichlet判别法得，$\sum\frac{x^n}{\sqrt{n}}$在D上一致收敛

(5) $\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\}$在D上一致有界

$\forall x\in(-1,0), \{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\}$单增，$\forall x\in[0,1), \{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\}$单减

$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in D}|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}-0|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0\Rightarrow\sum\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\rightrightarrows0\ (n\to+\infty)\ x\in D$

由Dirichlet判别法得，$\sum(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$在$D$上一致收敛

(6) $\exists\varepsilon_0=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2}$ s.t. $\forall N>0, \exists n_0=N+1, p_0=n_0, x_0=\frac{\pi}{4(n_0+1)}$ s.t. $|\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0}u_k(x)|\geq n_0\cdot\frac{\sin(n_0+1)x_0}{2n_0}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2}=\varepsilon_0$

使$\sin(n_0+k)$全部位于$(0,\frac{\pi}{2})$，使其单调以便放缩

故$\sum\frac{\sin nx}{n}$在D上不一致收敛

10. 令$u_n(x)=(-1)^n x^n(1-x)$

$\forall x\in[0,1], \lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=x<1\Rightarrow\sum|u_n(x)|$收敛

$\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\}$有界

$\forall x\in[0,1], \{x^n(1-x)\}$单减

$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,1]}|x^n(1-x)-0|=\lim_{n\to+\infty}x^n(1-x)|_{x=\frac{n}{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=0$

由Dirichlet判别法得，$\sum(-1)^n x^n(1-x)$在$[0,1]$上一致收敛

令$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}x^n(1-x)$，$S(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,1)\\ 0, & x=1\end{cases}$

$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,1]}|S_n(x)-S(x)|=1\neq0\Rightarrow\sum x^n(1-x)$在$[0,1]$上不一致收敛

11. $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in(a,b)}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0\Rightarrow\{f_n\}$在$(a,b)$内一致收敛于$f$

12. $u_n(x)$在$[a,b]$上单调$\Rightarrow\forall x\in[a,b], u_n(x)\leq\max\{u_n(a),u_n(b)\}$

$\lim_{n\to+\infty}u_n(a)=\lim_{n\to+\infty}u_n(b)=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n(x)=0$，$\{u_n(x)\}$单减

由Leibniz判别法得，$\sum(-1)^{n+1}u_n(x)$收敛

$\forall x\in[a,b]$, $u_n(x)\leq u_n(a)+u_n(b)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n(a)+u_n(b))=0 \Rightarrow u_n(x)\rightrightarrows 0\ (n\to+\infty)\ x\in[a,b]$

$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\right\}$有界，$\forall x\in[a,b]$，$\{u_n(x)\}$单减

由Dirichlet判别法得，$\sum(-1)^{n+1}u_n(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛

13. $f_i(x)\rightrightarrows 0\ (n\to+\infty)\ x\in I \Rightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ s.t. $\forall n>N$, $x\in I$, $|f_n(x)|<\varepsilon$

令$\varepsilon_i=\frac{1}{i^2}$，则$\forall i\in N^+$，$\exists N_i>0$ s.t. $\forall n>N_i$, $x\in I$, $|f_n(x)|<\varepsilon_i=\frac{1}{i^2}$

令$n_i=N_i+1$，$\sum\frac{1}{n^2}$收敛 $\Rightarrow \sum f_{n_i}(x)$ 在I上一致收敛

习 题 13.2

1. 讨论下列各函数列$\{f_n\}$在所定义的区间上：

(a) $\{f_n\}$与$\{f_n'\}$的一致收敛性；

(b) $\{f_n\}$是否有定理 13.9, 13.10, 13.11 的条件与结论.

(1) $f_n(x)=\dfrac{2x+n}{x+n}, x\in[0,b]$；　(2) $f_n(x)=x-\dfrac{x^n}{n}, x\in[0,1]$；

(3) $f_n(x)=nxe^{-nx^2}, x\in[0,1]$.

2. 证明：若函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上满足定理 13.11 的条件，则$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛.

3. 证明定理 13.12 和定理 13.14.

4. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n^2}, x\in[-1,1]$，计算积分$\int_0^x S(t)\,dt$.

5. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n\sqrt{n}}, x\in(-\infty,+\infty)$，计算积分$\int_0^x S(t)\,dt$.

6. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}, x>0$，计算$\int_{\ln 2}^{\ln 3}S(t)\,dt$.

7. 证明：函数 $f(x)=\sum\dfrac{\sin nx}{n^3}$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续，且有连续的导函数.

8. 证明：定义在$[0,2\pi]$上的函数项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}r^n\cos nx\ (0<r<1)$满足定理 13.13 条件，且

$\int_0^{2\pi}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}r^n\cos nx\right)dx=2\pi$.

---

9. 讨论下列函数列在所定义区间上的一致收敛性及极限函数的连续性、可微性和可积性：

(1) $f_n(x)=xe^{-nx^2}, n=1,2,\cdots, x\in[-l,l]$；

(2) $f_n(x)=\dfrac{nx}{nx+1}, n=1,2,\cdots,$　(i) $x\in[0,+\infty)$，　(ii) $x\in[a,+\infty)\ (a>0)$.

10. 设 f 在$(-\infty,+\infty)$上有任意阶导数，记 $F_n=f^{(n)}$，且在任何有限区间内

$$F_n \rightrightarrows \varphi\ (n\to\infty),$$

试证 $\varphi(x)=ce^x$（c 为常数）.

1.

(1) $f_n(x)=\frac{2x+n}{x+n}$, $f_n'(x)=\frac{n}{(x+n)^2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0,b]}|f_n(x)-1|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{b}{b+n}\right|=0\Rightarrow\{f_n\}$ 在 $[0,b]$ 上一致收敛

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0,b]}|f_n'(x)-0|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n}\right|=0\Rightarrow\{f_n'\}$ 在 $[0,b]$ 上一致收敛

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)$, $\int_0^b\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\,dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^b f_n(x)\,dx$, $\frac{d}{dx}\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{d}{dx}f_n(x)\right)$

(2) $f_n(x)=x-\frac{x^n}{n}$, $f_n'(x)=1-x^{n-1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-x|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n}\right|=0\Rightarrow\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛

令 $g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n'(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1)\\ 0, & x=1\end{cases}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n'(x)-g(x)|=1\neq0\Rightarrow\{f_n'\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)$, $\int_0^1\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\,dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$, $\frac{d}{dx}\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\neq\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{d}{dx}f_n(x)\right)$

(3) $f(x)=nxe^{-nx^2}$, $f'(x)=(1-2nx^2)ne^{-nx^2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|=+\infty\Rightarrow\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛

令 $g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n'(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0\\ 0, & x\in(0,1]\end{cases}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n'(x)-g|=+\infty\Rightarrow\{f_n'\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)$, $\int_0^1\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\,dx\neq\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$, $\frac{d}{dx}\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\neq\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{d}{dx}f_n(x)\right)$

2. $f_n(x)=f_n(x_0)+\int_{x_0}^x f_n'(t)\,dt$

$\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，由 Cauchy 准则得 $\forall\varepsilon>0, \exists N_1>0$ s.t. $\forall m,n>N_1, x\in[a,b]$, $|f_m'(x)-f_n'(x)|<\varepsilon$

$\{f_n(x_0)\}$ 收敛，由 Cauchy 准则得 $\forall\varepsilon>0, \exists N_2>0$ s.t. $\forall m,n>N_2$, $|f_m(x_0)-f_n(x_0)|<\varepsilon$

故 $\forall\varepsilon>0, \exists N=\max\{N_1,N_2\}$ s.t. $\forall m,n>N, x\in[a,b]$, $|f_m(x)-f_n(x)|=\left|f_m(x_0)+\int_{x_0}^x f_m'(t)\,dt-f_n(x_0)-\int_{x_0}^x f_n'(t)\,dt\right|\le|f_m(x_0)-f_n(x_0)|+\left|\int_{x_0}^x(f_m'(t)-f_n'(t))\,dt\right|<(1+b-a)\varepsilon$

由 ε 的任意性得，$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛

3. 略

4. $\left|\frac{x^{n-1}}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$，$\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法得，$\sum\frac{x^{n-1}}{n^2}$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛

$\int_0^x S(t)\,dt=\int_0^x\sum\frac{t^{n-1}}{n^2}\,dt=\sum\int_0^x\frac{t^{n-1}}{n^2}\,dt=\sum\frac{x^n}{n^3}$

5. $\left|\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}\right|\le\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，$\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法得，$\sum\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛

$\int_0^x S(t)\,dt=\int_0^x\sum\frac{\cos nt}{n\sqrt{n}}\,dt=\sum\int_0^x\frac{\cos nt}{n\sqrt{n}}\,dt=\sum\frac{\sin nx}{n^2\sqrt{n}}$

6. $\forall x\in[\ln 2,\ln 3]$, $\left|\frac{n}{e^{nx}}\right|\le\frac{n}{e^{n\ln 2}}$

令 $u_n=\frac{n}{e^{n\ln 2}}$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}\Rightarrow\sum\frac{n}{e^{n\ln 2}}$ 收敛

由 Weierstrass 判别法得，$\sum ne^{-nx}$ 在 $[\ln 2,\ln 3]$ 上一致收敛

$\int_{\ln 2}^{\ln 3}S(t)\,dt=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\sum ne^{-nt}\,dt=\sum\int_{\ln 2}^{\ln 3}ne^{-nt}\,dt=\sum\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{2}$

7. $\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right|\le\frac{1}{n^3}$，$\sum\frac{1}{n^3}$ 收敛

由Weierstrass判别法得，$\sum\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛

显然，$\forall n$，$\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续

由函数项级数的连续性，$\sum\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续

$\frac{d}{dx}\frac{\sin nx}{n^3}=\frac{\cos nx}{n^2}$，显然在 $\mathbb{R}$ 上连续

故 $\frac{d}{dx}(\sum\frac{\sin nx}{n^3})=\sum(\frac{d}{dx}\frac{\sin nx}{n^3})=\sum\frac{\cos nx}{n^2}$

$|\frac{\cos nx}{n^2}|\leq\frac{1}{n^2}$，$\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛

由Weierstrass判别法得，$\sum\frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛

显然，$\forall n$，$\frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续

由函数项级数的连续性，$\sum\frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续

即 $\sum\frac{\sin nx}{n^3}$ 有连续的导函数

8. $|r^n\cos nx|\leq r^n$，$\sum r^n$ 收敛

由Weierstrass判别法得，$\sum r^n\cos nx$ 在 $[0,2\pi]$ 上一致收敛

显然，$\forall n$，$r^n\cos nx$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续

故 $\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}r^n\cos nx\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}r^n\cos nx\,dx=\int_0^{2\pi}1\,dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{2\pi}r^n\cos nx\,dx=2\pi$

9.

(1) $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=0$

$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[-l,l]}|f_n(x)-0|=\lim_{n\to+\infty}f_n(\frac{1}{\sqrt{2n}})=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2n}}=0\Rightarrow f_n(x)\rightrightarrows 0\quad(n\to+\infty)\quad x\in[-l,l]$

又 $f(x)=0$，故 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续、可微、可积

(2) (i) 令 $f(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$

$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=1\Rightarrow f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致收敛

$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不连续，可积，不可微

(ii) 由 (i) 分析可知，$f_n(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛

$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，可积，可微

10. $F_n\rightrightarrows\varphi\Rightarrow\frac{d}{dx}\lim_{n\to+\infty}F_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{d}{dx}F_n=\lim_{n\to+\infty}F_{n+1}\Rightarrow\varphi'=\varphi$

当 $\varphi(x)\neq0$ 时，$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=1$，两边积分得 $\ln|\varphi(x)|=x+C_1\Rightarrow\varphi(x)=\pm e^{C_1}e^x=ce^x$

当 $\varphi(x)=0$ 时，令 $c=0$ 即得.

综上，$\varphi(x)=ce^x$.

第十三章总练习题

1. 试问 k 为何值时，下列函数列 $\{f_n\}$ 一致收敛：

(1) $f_n(x)=xn^k e^{-nx}$, $0\leq x<+\infty$；

(2) $f_n(x)=\begin{cases} xn^k, & 0\leq x\leq \frac{1}{n}, \\ \left(\frac{2}{n}-x\right)n^k, & \frac{1}{n}<x\leq\frac{2}{n}, \\ 0, & \frac{2}{n}<x\leq 1. \end{cases}$

2. 证明：(1) 若 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ $(n\to\infty)$, $x\in I$，且 f 在 I 上有界，则 $\{f_n\}$ 至多除有限项外在 I 上是一致有界的；

(2) 若 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ $(n\to\infty)$, $x\in I$，且对每个正整数 n，f_n 在 I 上有界，则 $\{f_n\}$ 在 I 上一致有界.

3. 设 f 为 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上的连续函数. 证明：

(1) $\{x^n f(x)\}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上收敛；

(2) $\{x^n f(x)\}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上一致收敛的充要条件是 $f(1)=0$.

4. 若把定理 13.10 中一致收敛函数列 $\{f_n\}$ 的每一项在 $[a,b]$ 上连续改为在 $[a,b]$ 上可积，试证 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上的极限函数在 $[a,b]$ 上也可积.

5. 设级数 $\sum a_n$ 收敛. 证明

$$\lim_{x\to 0^+}\sum\frac{a_n}{n^x}=\sum a_n.$$

6. 设可微函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛，$\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界. 证明：$\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

7. 设连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，而 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 证明：$\{g(f_n(x))\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $g(f(x))$.

1.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0,+\infty)}|f_n(x)-0|=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{k-1}}{e}$

故当 $k-1<0$，即 $k<1$ 时 $f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(\frac{1}{n})=n^{k-1}$

故当 $k-1<0$，即 $k<1$ 时 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛

2.

(1) f 在 I 上有界 $\Rightarrow \exists M>0$ s.t. $\forall x\in I$, $|f(x)|\leq M$

假设 $\{f_n\}$ 有无限项在 I 上不一致有界

则 $\forall N>0$, $\exists n_0>N$, $x_0\in I$ s.t. $|f_{n_0}(x_0)|\geq M+1$

$\Rightarrow$ 令 $\varepsilon_0=1$, $\forall N>0$, $\exists n_0>N$, $x_0\in I$ s.t. $|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|\geq M+1-M=1=\varepsilon_0$，与 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ $(n\to+\infty)$ $x\in I$ 矛盾！

故 $\{f_n\}$ 至多除有限项外在 I 上是一致有界的

(2) 记 $M_n=\sup\limits_{x\in I}f_n(x)$

假设 $\{M_n\}$ 无界

则 $\forall M>0$, $N>0$, $\exists n_0>N$ s.t. $M_{n_0}\geq M+1 \Rightarrow \exists x_0\in I$ s.t. $|f_{n_0}(x_0)|>M$

故 $\{f_n(x)\}$ 不一致收敛，与 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ $(n\to+\infty)$ $x\in I$ 矛盾！

故 $\{M_n\}$ 有界

记 $M_0=\sup\limits_{n\in N^+}M_n$

$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ $(n\to+\infty)$ $x\in I \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0 \Rightarrow \sup\limits_{x\in I}|f(x)|\leq M$

3.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}x^n f(x)=\begin{cases}0, & x\in[\frac{1}{2},1) \\ f(x), & x=1\end{cases}$

(2)

$\Rightarrow$) 显然

$\Leftarrow$) 假设 $f(1)\neq 0$

f 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续 $\Rightarrow \exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in U_-^\circ(1;\delta)$, $f(x)>\frac{1}{2}$

$\exists\varepsilon_0>0$ s.t. $\forall N>0$, $\exists n_0=N+1$, $x_0=\max\{1-\delta,(2\varepsilon)^{\frac{1}{N+1}}\}$ s.t. $x_0^{n_0}f(x_0)>\varepsilon_0$，与 f 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上一致收敛矛盾！

故 $f(1)=0$

4. 对于 $[a,b]$ 的任一分割 T，$f(x)$ 在 Δx_i 上的振幅为 $\omega_i=\sup\limits_{x',x''\in\Delta x_i}|f(x')-f(x'')|$

$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ $(n\to+\infty)$ $x\in[a,b] \Rightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ s.t. $|f_N(x)-f(x)|<\varepsilon$

$f_N(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 $\Rightarrow \forall\varepsilon$, $\exists\delta>0$ s.t. $\forall \|T\|<\delta$, $\sum\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$

$\Rightarrow |f(x')-f(x'')| = |f(x')-f_N(x')+f_N(x')-f_N(x'')+f_N(x'')-f(x'')| \le |f(x')-f_N(x')|+|f_N(x')-f_N(x'')|+|f_N(x'')-f(x'')| < 2\varepsilon+\omega_i$

$\Rightarrow \sum \omega_i \Delta x_i \le \sum (2\varepsilon+\omega_i)\Delta x_i < 2(b-a)\varepsilon+\varepsilon = (2b-2a+1)\varepsilon$

由ε的任意性即证

5. $\sum a_n$ 收敛 $\Rightarrow \{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 有界

$\forall n$, $\{\frac{1}{n^x}\}$ 单调

$\frac{1}{n^x} \rightrightarrows 0 \quad (n\to+\infty) \quad x\in U_+^\circ(0)$

由Dirichlet判别法得, $\sum \frac{a_n}{n^x}$ 在 $U_+^\circ(0)$上一致收敛

故 $\lim_{x\to 0^+} \sum \frac{a_n}{n^x} = \sum \lim_{x\to 0^+} \frac{a_n}{n^x} = \sum a_n$

6. $\{f_n'(x)\}$ 在$[a,b]$上一致有界 $\Rightarrow \exists M>0$ s.t. $\forall x\in[a,b]$, $|f_n'(x)| \le M$

$\{f_n(x)\}$ 在$[a,b]$上收敛 $\Rightarrow \forall \varepsilon>0$, $x\in[a,b]$, $\exists N>0$ s.t. $\forall n>N$, $p\in\mathbb{Z}^+$, $|f_n(x)-f_{n+p}(x)|<\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta=\frac{\varepsilon}{2M}$. 令$\|T\|<\delta$

$\forall x\in\Delta x_i$, $|f_n(x)-f_{n+p}(x)| \le |f_n(x)-f_{n+p}(x)-f_n(x_i)+f_{n+p}(x_i)+f_{n+p}(x_i)| + |f_n(x_i)-f_{n+p}(x_i)| < \varepsilon + 2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} = 2\varepsilon$

令$N=\max N_i$, 则$\forall n>N$, $x\in[a,b]$, $|f_n(x)-f_{n+p}(x)|<\varepsilon$

$\Rightarrow \{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛

7. $f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (n\to+\infty) \quad x\in[a,b] \Rightarrow \forall \delta>0$, $\exists N>0$ s.t. $\forall n>N$, $x\in[a,b]$, $|f_n(x)-f(x)|<\delta$

$g(x)$ 在$\mathbb{R}$上连续 $\Rightarrow \forall x_0\in[a,b]$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) \Rightarrow \exists \delta>0$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0;\delta)$, $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N>0$ s.t. $\forall n>N$, $x\in[a,b]$. $|g(f_n(x))-g(f(x))|<\varepsilon$

$\Rightarrow g(f_n(x)) \rightrightarrows g(f(x)) \quad (n\to+\infty) \quad x\in[a,b]$

习 题 14.1

1. 求下列幂级数的收敛半径与收敛区域：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 2^n}$；

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$；　(4) $\sum_{n=0}^{\infty} r^{n^2}x^n \ (0<r<1)$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$；　(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$；　(8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$.

2. 应用逐项求导或逐项求积方法求下列幂级数的和函数(应同时指出它们的定义域)：

(1) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$；　(2) $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+\cdots+n(n+1)x^n+\cdots$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$.

3. 证明：设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $|x|<R$ 时收敛，若 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 也收敛，则

$$\int_0^R f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$$

(注意：这里不管 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=R$ 是否收敛). 应用这个结果证明：

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

4. 证明：

(1) $y=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足方程 $y^{(4)}=y$；

(2) $y=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ 满足方程 $xy''+y'-y=0$.

5. 证明：设 f 为幂级数(2)在 $(-R,R)$ 上的和函数，若 f 为奇函数，则级数(2)仅出现奇次幂的项，若 f 为偶函数，则(2)仅出现偶次幂的项.

6. 证明：若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 的收敛半径是 $R(0<R<+\infty)$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{2n}$ 的收敛半径是 $\sqrt{R}$.

7. 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 的收敛半径是 $R(0<R<+\infty)$. 证明：对给定的 $M>\frac{1}{R}$，存在 $K>0$，使得 $|a_n|\leqslant KM^n$，$\forall n=1,2,\cdots$.

---

8. 求下列幂级数的收敛域：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n} \ (a>0,b>0)$；　(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$.

9. 证明定理 14.3 并求下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$；　(2) $a+bx+ax^2+bx^3+\cdots \ (0<a<b)$.

10. 求下列幂级数的收敛半径及其和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$；

(3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n+1}x^n$ (提示：$(n-1)^2=[(n+1)-2]^2=(n+1)^2-4(n+1)+4$).

11. 设 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 为等差数列 $(a_0\neq 0)$. 试求：

(1) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径；　(2) 数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ 的和.

1.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow R=1$，收敛区间为 $(-1,1)$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{n}{n+1})^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow R=2$，收敛区间为 $[-2,2]$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} \Rightarrow R=4$，收敛区间为 $(-4,4)$

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} r^{2n+1} = 0 \Rightarrow R=+\infty$，收敛区间为 $\mathbb{R}$

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(x-2)^2}{(2n+1)(2n)} = 0$

$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$，$\{\sum u_n(x)\}$ 收敛

$\Rightarrow R=+\infty$

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 3 \Rightarrow R=\frac{1}{3}$，收敛区间为 $[-\frac{4}{3},\frac{2}{3})$

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 \Rightarrow R=1$，收敛区间为 $(-1,1)$

(8) $\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{|x|^n}{2}$

(i) $x\in(-1,1) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 0 \Rightarrow \sum u_n$ 在 $(-1,1)$ 上收敛

(ii) $x=\pm 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1 \Rightarrow \sum u_n$ 在 $\{-1,1\}$ 上收敛

(iii) $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = +\infty \Rightarrow \sum u_n$ 在 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 上发散

综上，$\sum u_n$ 在 $[-1,1]$ 上收敛

2.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2n-1}x^2 = x^2 \Rightarrow \sum u_n$ 在 $(-1,1)$ 上收敛 $\Rightarrow \sum u_n$ 在 $(-1,1)$ 上一致收敛

$\frac{d}{dx}\sum u_n = \sum \frac{d}{dx}u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow \sum u_x = \int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

$\sum u_n(0)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow \sum u_n(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，$x\in(-1,1)$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = 1 \Rightarrow R=1 \Rightarrow \sum u_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 上收敛 $\Rightarrow \sum u_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 上一致收敛

$\int \sum u_n(x)\,dx = \sum \int u_n(x)\,dx = \sum_{n=2}^{+\infty} nx^n + C = \frac{1}{(1-x)^2} - x + C$

$\sum u_n(x) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{(1-x)^2} - x + C) = \frac{2}{(1-x)^3} - 1$，$x\in(-1,1)$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 \Rightarrow R=1 \Rightarrow \sum u_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 上收敛 $\Rightarrow \sum u_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 上一致收敛

$\frac{d}{dx}\sum u_n(x) = \sum \frac{d}{dx}u_n(x) = \sum 2nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$

$\sum u_n(x) = \int \frac{x}{(1-x)^2}dx = \frac{x^2+x}{(1-x)^3} + C$

$\sum u_n(0)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow \sum n^2x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$

3. $f(x)$ 在 $(-R,R)$ 收敛 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(-R,R)$ 一致收敛

$\int_0^R f(x) = \sum \int_0^R a_n x^n = \sum \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \Rightarrow a_n = (-1)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow R = 1$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2 = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

4.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^4}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)} \Rightarrow \sum u_n$ 在 $\mathbb{R}$ 上收敛 $\Rightarrow \sum u_n$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛

$y^{(4)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{4n}}{(4n)!}\right)^{(4)} = \sum\limits_{n=4}^{+\infty} \frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!} = y$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0 \Rightarrow \sum u_n$ 在 $\mathbb{R}$ 上收敛 $\Rightarrow \sum u_n$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛

$y' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{(n!)^2}\right)' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!(n-1)!}$

$y'' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{(n!)^2}\right)'' = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n!(n-2)!}$

$xy'' + y' - y = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{x^{n-1}}{n!(n-2)!} + \frac{x^{n-1}}{n!(n-1)!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!(n-1)!}\right) = 0$

5. 易证

6. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 $R \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{R}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} x^2 = \frac{x^2}{R}$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$ 在 $(-\sqrt{R}, \sqrt{R})$ 上收敛

7. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 $R \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$

$\Rightarrow \forall K > 0,\ \exists N > 0$ s.t. $\forall n > N,\ \sqrt[n]{|a_n|} < \sqrt[n]{K} M$

令 $K = \max\left\{\frac{|a_1|}{M}, \frac{|a_2|}{M^2}, \dots, \frac{|a_N|}{M^N}\right\}$ 即可

8.

(1) 令 $c = \max\{a, b\}$，则收敛域为 $(-c, c)$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e \Rightarrow$ 收敛域为 $(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$

9. 略

10.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 \Rightarrow R = 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \begin{cases} \frac{1-x}{x} \ln(1-x) + 1, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

(2) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)} = \begin{cases} -\frac{(1-x)^2}{2x^2} \ln(1-x) - \frac{1}{2x} + \frac{3}{4}, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1) \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 1 \end{cases}$$

(3) $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-1)^2}{n+1} x^n = \begin{cases} -\frac{4\ln(1-x)}{x} + \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{4}{1-x} - 1, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

11. 设 $a_n = a_0 + nd$

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 \Rightarrow R = 1$

(2) 记 $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$

$\frac{S}{2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$

$S - \frac{S}{2} = a_0 + d \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = a_0 + d \Rightarrow S = 2a_0 + 2d$

习　题　14.2

1. 设函数 f 在区间 (a,b) 上的各阶导数一致有界，即存在正数 M，对一切 $x\in(a,b)$，有

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant M,\quad n=1,2,\cdots.$$

证明：对 (a,b) 上任一点 x 与 x_0 有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\quad (f^{(0)}(x)=f(x),0!=1).$$

2. 利用已知函数的幂级数展开式，求下列函数在 $x=0$ 处的幂级数展开式，并确定它收敛于该函数的区间：

(1) e^{x^2}；　(2) $\frac{x^{10}}{1-x}$；

(3) $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$；　(4) $\sin^2 x$；

(5) $\frac{e^x}{1-x}$；　(6) $\frac{x}{1+x-2x^2}$；

(7) $\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$；　(8) $(1+x)e^{-x}$；

(9) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

3. 求下列函数在 $x=1$ 处的泰勒展开式：

(1) $f(x)=3+2x-4x^2+7x^3$；　(2) $f(x)=\frac{1}{x}$；

(3) $f(x)=\sqrt{x^3}$.

---

4. 求下列函数的麦克劳林级数展开式：

(1) $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$；　(2) $x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$.

5. 试将 $f(x)=\ln x$ 按 $\frac{x-1}{x+1}$ 的幂展开成幂级数.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}|R_n(x)|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|(x-x_0)^{n+1}|$

$\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|(x-x_0)^{n+1}|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}\cdot(b-a)^{n+1}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{M}{(n+1)!}\cdot(b-a)^{n+1}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|(x-x_0)^{n+1}|=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(x)=0$

$\Rightarrow f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

2.

(1) $e^{x^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}$，收敛域为 $\mathbb{R}$

(2) $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n\Rightarrow\frac{x^{10}}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^{n+10}$，收敛域为 $(-1,1)$

(3) $\frac{1}{\sqrt{1-2x}}=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(2x)^n\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{1-2x}}=x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}2^nx^{n+1}$，收敛域为 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

(4) $\sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$\cos 2x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2x)^n}{(2n)!}$

$\Rightarrow\sin^2x=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}x^n}{(2n)!}$，收敛域为 $\mathbb{R}$

(5) $e^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$，$\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$

$\Rightarrow\frac{e^x}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\cdot x^k=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!})x^n$，收敛域为 $(-1,1)$

(6) $\frac{x}{1+x-2x^2}=-\frac{1}{3}(\frac{1}{1+2x}-\frac{1}{1-x})$

$\frac{1}{1+2x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(2x)^n$，$\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$

$\Rightarrow\frac{x}{1+x-2x^2}=-\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}((-2)^n-1)x^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1-(-2)^n}{3}x^n$，收敛域为 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

(7) $\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}dt=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}dt=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$，收敛域为 $\mathbb{R}$

(8) $e^{-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$

$(1+x)e^{-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{n+1}=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!})x^n$

(9) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt=\int_0^x(1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^nt^{2n})dt=x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^x\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^nt^{2n}dt=x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}(-1)^nx^{2n+1}$，收敛域为 $[-1,1]$

3.

(1) $f(1)=8$, $f'(1)=15$, $f''(1)=34$, $f'''(1)=42$，$f^{(n)}(1)=0$，$n\geqslant 4$

$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n=8+15(x-1)+17(x-1)^2+7(x-1)^3$，$x\in\mathbb{R}$

(2) $f^{(n)}(x)=(-1)^nn!x^{-n-1}$

$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x-1)^n$，$x\in(0,2)$

(3) $f(1)=1$, $f'(1)=\frac{3}{2}$, $f''(1)=\frac{3}{4}$，$f^{(n)}(1)=(-1)^n\frac{3(2n-5)!!}{2^n}$，$n\geqslant 3$

$f(x)=1+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{3}{8}(x-1)^2+\sum\limits_{n=3}^{+\infty}(-1)^n\frac{3(2n-5)!!}{2^nn!}(x-1)^n$，$x\in[0,2]$

$f(x)=x^{\frac{3}{2}}=(1+t)^{\frac{3}{2}}=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}C_{\frac{3}{2}}^{n}t^n$，$t\in[-1,1]$

$\Rightarrow f(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}C_{\frac{3}{2}}^{n}(x-1)^n$，$x\in[0,2]$

4.

(1) $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$，$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n$

$\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\frac{n+1}{2}-\frac{(-1)^n}{4})x^n$，$x\in(-1,1)$

(2) $x\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+1}$

$\ln\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n}$

$\Rightarrow x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n-1)(2n)}$, $x \in (-1,1)$

5. 令 $t = \frac{x-1}{x+1}$，则 $x = \frac{1+t}{1-t}$

$\ln x = \ln(1+t) - \ln(1-t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^{n-1}}{n} t^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} t^{2n-1}$, $t \in (-1,1)$

第十四章总练习题

1. 证明：当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时，

$$\frac{1}{1-3x+2x^2}=1+3x+7x^2+\cdots+(2^n-1)x^{n-1}+\cdots.$$

2. 求下列函数的幂级数展开式：

(1) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$；　(2) $f(x)=\sin^3 x$；

(3) $f(x)=\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t$.

3. 确定下列幂级数的收敛域，并求其和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}$；　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}$；　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}$.

4. 应用幂级数性质求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$；　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

5. 设函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$$

定义在[0,1]上，证明它在(0,1)上满足下述方程：

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=f(1).$$

6. 利用函数的幂级数展开式求下列不定式极限：

(1) $\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$；　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$.

1. $\frac{1}{1-3x+2x^2}=\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x}$

$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ ， $\frac{1}{1-2x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1-3x+2x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(2^{n+1}-1)x^n$ ， $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

2.

(1) $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\Rightarrow x\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n}$

$\Rightarrow f(x)=(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)n}x^n$

(2) $\sin^3x=\sin x(1-\cos^2x)=\frac{1}{2}\sin x(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{4}(\sin 3x-\sin x)=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$

$\sin x=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\Rightarrow \sin 3x=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(3x)^{2n-1}}{(2n-1)!}$

$\Rightarrow \sin^3x=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{3-3^{2n-1}}{4(2n-1)!}x^{2n-1}$

(3) $\int_0^x\cos^2t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^x\cos 2t\,dt+\frac{1}{2}\int_0^x 1\,dt$

$\int_0^x 1\,dt=1$

$\int_0^x\cos 2t\,dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\Rightarrow\int_0^x\cos^2t\,dt=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2(2n+1)!}$

3.

(1) $\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1\Rightarrow R=1$，收敛域为 $(-1,1)$

$\int_0^x\sum n^2t^{n-1}dt=\sum\int_0^x n^2t^{n-1}dt=\sum nx^n=x\sum nx^{n-1}$

$\int_0^x\sum nt^{n-1}dt=\sum\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum x^n=\frac{1}{1-x}$

$\Rightarrow\sum nx^{n-1}=\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow x\sum nx^{n-1}=\frac{x}{(1-x)^2}$

$\Rightarrow\sum n^2x^{n-1}=\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{1+x}{(1-x)^3}$

(2) $\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{4(2n+1)}\cdot x^2=\frac{x^2}{4}\Rightarrow R=2$，收敛域为 $(-2,2)$

$\sum x^n=\frac{1}{1-x}\Rightarrow\sum(\frac{x^2}{2})^n=\frac{2}{2-x^2}$

$\sum nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}\Rightarrow\sum n(\frac{x^2}{2})^n=\frac{x^2}{2(1-\frac{x^2}{2})^n}$

$\Rightarrow\sum\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}=\sum n(\frac{x^2}{2})^n+\frac{1}{2}\sum(\frac{x^2}{2})^n=\frac{2^{n-1}x^n+(2-x^2)^{n-1}}{(2-x^2)^n}$

(3) $\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1\Rightarrow R=1$，收敛域为 $(0,2)$

$\sum nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow\sum n(x-1)^{n-1}=\frac{1}{(2-x)^2}$

(4) $\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=x^2\Rightarrow R=1$，收敛域为 $[-1,1]$

$\frac{d}{dx}\sum(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}=\sum\frac{d}{dx}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}=\sum(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n-1}=x\sum(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x\arctan x$

$\Rightarrow\sum(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}=\int_0^x t\arctan t\,dt=\frac{(x^2+1)\arctan x-x}{2}$

4.

(1) $\frac{d}{dx}\sum\frac{n}{(n+1)!}x^{n+1}=\sum\frac{d}{dx}\frac{n}{(n+1)!}x^{n+1}=\sum\frac{1}{(n-1)!}x^n=xe^x$

$\Rightarrow\sum\frac{n}{(n+1)!}x^{n+1}=\int_0^x te^t\,dt=(x-1)e^x+C$ ，代入 $x=0$ 得 $C=1$

$\Rightarrow\sum\frac{n}{(n+1)!}=((x-1)e^x+1)\Big|_{x=1}=1$

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

5. $f'(x) = \sum \frac{d}{dx} \cdot \frac{x^n}{n^2} = \sum \frac{x^{n-1}}{n} = \frac{1}{x} \sum \frac{x^n}{n}$

$\frac{d}{dx} \sum \frac{x^n}{n} = \sum \frac{d}{dx} \frac{x^n}{n} = \sum x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$

$\Rightarrow \sum \frac{x^n}{n} = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \ln(1-x)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{\ln(1-x)}{x} \Rightarrow f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = -\sum \frac{x^n}{n^2}$

$\Rightarrow f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \sum \frac{1}{n^2} = f(1)$

6.

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x - x^2\left(x - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \frac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \left[x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right]}{[x + o(x)]^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = -\frac{1}{6}$

习 题 15.1

1. 在指定区间上把下列函数展开成傅里叶级数：

(1) $f(x)=x$, (i) $-\pi<x<\pi$, (ii) $0<x<2\pi$;

(2) $f(x)=x^2$, (i) $-\pi<x<\pi$, (ii) $0<x<2\pi$;

(3) $f(x)=\begin{cases} ax, & -\pi<x\leqslant 0, \\ bx, & 0<x<\pi \end{cases}$ $(a\neq b, a\neq 0, b\neq 0)$.

2. 设 f 是以 2π 为周期的可积函数，证明对任何实数 c，有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, n=1,2,\cdots.$$

3. 把函数

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -\pi<x<0, \\ \frac{\pi}{4}, & 0\leqslant x<\pi \end{cases}$$

展开成傅里叶级数，并由它推出

(1) $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$; (2) $\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\cdots$;

(3) $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\cdots$.

4. 设函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x+\pi)=-f(x)$. 问此函数在 $(-\pi,\pi)$ 上的傅里叶级数具有什么特性.

5. 设函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x+\pi)=f(x)$. 问此函数在 $(-\pi,\pi)$ 上的傅里叶级数具有什么特性.

6. 试证函数系 $\cos nx, n=0,1,2,\cdots$ 和 $\sin nx, n=1,2,\cdots$ 都是 $[0,\pi]$ 上的正交函数系，但它们合起来的(5)式不是 $[0,\pi]$ 上的正交函数系.

7. 求下列函数的傅里叶级数展开式：

(1) $f(x)=\frac{\pi-x}{2}, 0<x<2\pi$;

(2) $f(x)=\sqrt{1-\cos x}, -\pi\leqslant x\leqslant\pi$;

(3) $f(x)=ax^2+bx+c$, (i) $0<x<2\pi$, (ii) $-\pi<x<\pi$;

(4) $f(x)=\operatorname{ch} x, -\pi<x<\pi$;

(5) $f(x)=\operatorname{sh} x, -\pi<x<\pi$.

8. 求函数 $f(x)=\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2), 0<x<2\pi$ 的傅里叶级数展开式，并应用它推出 $\frac{\pi^2}{6}=\sum\frac{1}{n^2}$.

---

9. 设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上的光滑函数，且 $f(-\pi)=f(\pi)$. a_n, b_n 为 f 的傅里叶系数，a'_n, b'_n 为 f 的导函数 f' 的傅里叶系数. 证明：

$$a'_0=0,\quad a'_n=nb_n,\quad b'_n=-na_n \quad (n=1,2,\cdots).$$

10. 证明：若三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

中的系数 a_n, b_n 满足关系

$$\sup_n\{|n^3a_n|, |n^3b_n|\}\leqslant M,$$

M 为常数，则上述三角级数收敛，且其和函数具有连续的导函数.

1.

(1) (i) $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=0$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=-\frac{2\cos n\pi}{n}$

$\Rightarrow f(x)=\sum -\frac{2\cos n\pi}{n}\sin nx$, $x\in(-\pi,\pi)$

(ii) $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx=0$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx=-\frac{2}{n}$

$\Rightarrow f(x)=\sum -\frac{2}{n}\sin nx$, $x\in(0,2\pi)$

(2) (i) $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=(-1)^n\frac{4}{n^2}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=0$

$\Rightarrow f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum(-1)^n\frac{4\cos nx}{n^2}$, $x\in(-\pi,\pi)$

(ii) $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx=-\frac{4\pi}{n}$

$\Rightarrow f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx)$

(3) $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{(b-a)(\cos n\pi-1)}{n^2\pi}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=-\frac{(a+b)n\pi\cos n\pi}{n^2\pi}$

$\Rightarrow f(x)=\frac{a+b}{2\pi}+\sum(\frac{(b-a)(\cos n\pi-1)}{n^2\pi}\cos nx-\frac{(a+b)n\pi\cos n\pi}{n^2\pi}\sin nx)$

2. 设 $c=k\pi+c_0$, $k\in\mathbb{Z}$, $c_0\in[0,\pi)$

则 $\forall g(x)$, $\int_c^{c+2\pi} g(x)\,dx=\int_{k\pi+c_0}^{(k+2)\pi+c_0} g(x)\,dx=\int_{k\pi+c_0}^{(k+1)\pi} g(x)\,dx+\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi+c_0} g(x)\,dx=\int_{c_0}^{\pi} g(x)\,dx+\int_{-\pi}^{c_0} g(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx$

即证.

3. $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=0$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1-\cos n\pi}{2n}$

$\Rightarrow f(x)=\sum\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$, $x\in(-\pi,\pi)$

$\frac{\pi}{4}=f(\frac{\pi}{2})=\sum\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

$\frac{\pi}{3}=(1+\frac{1}{3})\frac{\pi}{4}=\sum\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\frac{1}{3}\sum\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\sum(\frac{1}{12n-11}+\frac{1}{12n-7}-\frac{1}{12n-5}-\frac{1}{12n-1})$

$\frac{\pi}{4}=f(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}\sum(\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n-1})\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{6}\pi=\sum(\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n-1})$

4. $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx+\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx)=\frac{1}{\pi}[-\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,d(x+\pi)+\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx]=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[(-1)^{n+1}+1]f(x)\cos nx\,dx$

$\Rightarrow a_{2n}=0$

同理 $b_{2n}=0$

5. $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,d(x+\pi)+\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\right]=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[(-1)^n+1]f(x)\cos nx\,dx$

$\Rightarrow a_{2n-1}=0$

同理 $b_{2n-1}=0$

6. $\int_{0}^{\pi}\cos 2x\sin x\,dx=-\frac{2}{3}\neq 0\Rightarrow$ 不是正交函数系

7.

(1) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\,dx=0$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=0$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{n}$

$\Rightarrow f(x)=\sum\frac{\sin nx}{n}$, $x\in(0,2\pi)$

(2) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{4\sqrt{2}}{\pi}$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=-\frac{4\sqrt{2}}{(4n^2-1)\pi}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0$

$\Rightarrow f(x)=\frac{4\sqrt{2}}{\pi}-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum\frac{\cos nx}{4n^2-1}$, $x\in(-\pi,\pi)$

$f(\pm\pi)=\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow f(x)=\frac{4\sqrt{2}}{\pi}-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum\frac{\cos nx}{4n^2-1}$, $x\in[-\pi,\pi]$

(3) (i) $a_0=\int_{0}^{2\pi}f(x)\,dx=\frac{8}{3}a\pi^2+2b\pi+2c$

$a_n=\int_{0}^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{4a}{n^2}$

$b_n=\int_{0}^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=-\frac{4a\pi+2\pi}{n}$

$\Rightarrow f(x)=\frac{4}{3}a\pi^2+b\pi+c+\sum\left(\frac{4a}{n^2}\cos nx-\frac{4a\pi+2b}{n}\sin nx\right)$, $x\in(0,2\pi)$

(ii) $a_0=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{3}a\pi^2+2c$

$a_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=(-1)^n\frac{4a}{n}$

$b_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=(-1)^{n-1}\frac{2b}{n}$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}a\pi^2+c+\sum(-1)^n\frac{4a\cos nx-2b\sin nx}{n}$, $x\in(-\pi,\pi)$

(4) $a_0=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi$

$a_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=(-1)^n\frac{2}{(n^2+1)\pi}\operatorname{sh}\pi$

$b_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{sh}\pi+\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi\sum(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2+1}$, $x\in(-\pi,\pi)$

(5) $a_0=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=0$

$a_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0$

$b_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=(-1)^{n-1}\frac{2n}{(n^2+1)\pi}\operatorname{sh}\pi$

$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi\sum(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}\sin nx$, $x\in(-\pi,\pi)$

8. $a_0=\int_{0}^{2\pi}f(x)\,dx=0$

$a_n=\int_{0}^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{n^2}$

$b_n=\int_{0}^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=0$

$\Rightarrow f(x)=\sum\frac{\cos nx}{n^2}$, $x\in(0,2\pi)$

$f(0)=\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{\pi^2}{6}\Rightarrow\sum\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

9. $a_0'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\,dx=\frac{1}{\pi}[f(\pi)-f(-\pi)]=0$

$a_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,dx=\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=nb_n$

$b_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,dx=-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=-na_n$

10. $\sup_n\{|n^3a_n|,|n^3b_n|\}\le M\Rightarrow|a_n|+|b_n|\le\frac{2M}{n^2}$

$\sum\frac{2M}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow\sum(|a_n|+|b_n|)$ 收敛 $\Rightarrow\sum|a_n\cos nx+b_n\sin nx|$ 收敛 $\Rightarrow\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 一致收敛

记 $\sum u_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

$\Rightarrow \sum u_n'(x) = \sum n(a_n \sin nx - b_n \cos nx)$

$n(|a_n| + |b_n|) \le \frac{2M}{n^2}$

$\sum \frac{2M}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum n(|a_n| + |b_n|)$ 收敛 $\Rightarrow \sum u_n'(x)$ 一致收敛

$\forall n$, $u_n'(x)$ 连续 $\Rightarrow \sum u_n'(x)$ 和函数连续，即证.

习 题 15.2

1. 求下列周期函数的傅里叶级数展开式：

(1) $f(x)=|\cos x|$（周期 π）；　(2) $f(x)=x-[x]$（周期 1）；

(3) $f(x)=\sin^4 x$（周期 π）；　(4) $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$（周期 2π）.

2. 求函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 1, & 1<x<2, \\ 3-x, & 2\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$$

的傅里叶级数并讨论其敛散性.

3. 将函数 $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成余弦级数.

4. 将函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成正弦级数.

5. 把函数

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & 0<x\leqslant 2, \\ x-3, & 2<x<4 \end{cases}$$

在 $(0,4)$ 上展开成余弦级数.

6. 把函数 $f(x)=(x-1)^2$ 在 $(0,1)$ 上展开成余弦级数，并推出

$$\pi^2=6\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right).$$

---

7. 求下列函数的傅里叶级数展开式：

(1) $f(x)=\arcsin(\sin x)$；　(2) $f(x)=\arcsin(\cos x)$.

8. 试问如何把定义在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的可积函数 f 延拓到区间 $(-\pi,\pi)$ 上，使它们的傅里叶级数为如下的形式：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos(2n-1)x$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\sin(2n-1)x$.

1.

(1) $l=\frac{\pi}{2}$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=\frac{4}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\begin{cases} 0, & n=2k-1 \\ (-1)^{k+1}\frac{4}{\pi(4k^2-1)}, & n=2k \end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=0$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2k\pi$$

(2) $l=\frac{1}{2}$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=1$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\begin{cases} 0, & n=2k-1 \\ -\frac{2}{n\pi}, & n=2k \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum\frac{\sin 2n\pi x}{n}$$

(3) $l=\frac{\pi}{2}$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=\frac{3}{4}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\begin{cases} -\frac{1}{2}, & n=2 \\ \frac{1}{8}, & n=4 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=0$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

(4) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=0$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\begin{cases} (-1)^{k-1}\frac{4}{(2k-1)\pi}, & n=2k-1 \\ 0, & n=2k \end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=0$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{4}{\pi}\sum(-1)^{k-1}\frac{\cos(2k-1)\pi}{2k-1}$$

2. $l=3$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=\frac{4}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\begin{cases} 0, & n=2k-1 \\ \frac{3}{k^2\pi^2}\left[-1+(-1)^k\cos\frac{k\pi}{3}\right], & n=2k \end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=0$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}+\frac{1}{2\pi^2}\sum\frac{1}{n^2}\cos 2n\pi x$$

3. $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx=0$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx = \begin{cases} \frac{4}{n^2\pi}, & n=2k-1 \\ 0, & n=2k \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4}{\pi}\sum \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

4. $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx = \frac{8n}{(4n^2-1)\pi}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{8}{\pi}\sum \frac{n}{4n^2-1}\sin nx$$

5. $l=4$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos nx = \begin{cases} \frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=4k-2 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{32}{\pi^2}\sum \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{4}$$

6. $l=1$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos n\pi x\,dx = \frac{4}{n^2\pi^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum \frac{\cos n\pi x}{n^2}$$

$$f(0) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum\frac{1}{n^2} \Rightarrow \pi^2 = 6\sum\frac{1}{n^2}$$

7.

(1) $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \begin{cases} (-1)^{k-1}\frac{4}{n^2\pi}, & n=2k-1 \\ 0, & n=2k \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\pi}\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x$$

(2) $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \begin{cases} \frac{4}{n^2\pi}, & n=2k-1 \\ 0, & n=2k \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4}{\pi}\sum \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

8.

(1) $\hat{f}(x) = \begin{cases} -f(x+\pi), & x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2}) \\ f(-x), & x\in[-\frac{\pi}{2},0) \\ f(x), & x\in[0,\frac{\pi}{2}) \\ -f(\pi-x), & x\in[\frac{\pi}{2},\pi) \end{cases}$

(2) $\hat{f}(x) = \begin{cases} -f(x+\pi), & x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2}) \\ -f(-x), & x\in[-\frac{\pi}{2},0) \\ f(x), & x\in[0,\frac{\pi}{2}) \\ f(\pi-x), & x\in[\frac{\pi}{2},\pi) \end{cases}$

第十五章总练习题

1. 试求三角多项式

$$T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$$

的傅里叶级数展开式.

2. 设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上的可积函数, a_0,a_k,b_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 为 f 的傅里叶系数. 试证明:当

$$A_0=a_0,\quad A_k=a_k,\quad B_k=b_k\ (k=1,2,\cdots,n)$$

时,积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\mathrm{d}x$$

取最小值,且最小值为

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

上述 $T_n(x)$ 是第 1 题中的三角多项式, A_0,A_k,B_k 为它的傅里叶系数.

3. 设 f 是以 2π 为周期,且具有二阶连续可微的函数,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\quad b_n''=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\sin nx\mathrm{d}x.$$

若级数 $\sum b_n''$ 绝对收敛,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_n|}\leqslant\frac{1}{2}\left(2+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n''|\right).$$

4. 设周期为 2π 的可积函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 满足以下关系式:

(1) $\varphi(-x)=\psi(x)$; (2) $\varphi(-x)=-\psi(x)$.

试问 φ 的傅里叶系数 a_n,b_n 与 ψ 的傅里叶系数 α_n,β_n 有什么关系?

5. 设定义在 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{\varphi_n\}$ 满足关系

$$\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ 1, & n=m.\end{cases}$$

对于在 $[a,b]$ 上的可积函数 f,定义

$$a_n=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

证明: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,且有不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\leqslant\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x.$$

1. $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=A_0$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=A_n$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=B_n$

$\Rightarrow T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$

2. $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)-[\frac{A_0}{2}+\sum(A_k\cos kx+B_k\sin kx)]\}^2dx$

$=\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{a_0}{2}+\sum(a_k\cos kx+b_k\sin kx)]^2dx+\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{A_0}{2}+\sum(A_k\cos kx+B_k\sin kx)]^2dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)[\frac{A_0}{2}+\sum(A_k\cos kx+B_k\sin kx)]\,dx$

$=\pi[\frac{a_0^2}{2}+\sum(a_k^2+b_k^2)]+\pi[\frac{A_0^2}{2}+\sum(A_k^2+B_k^2)]-2\pi[\frac{a_0A_0}{2}+\sum(a_kA_k+b_kB_k)]$

$=\pi[\frac{1}{2}(a_0-A_0)^2+\sum(a_k-A_k)^2+\sum(b_k-B_k)^2]$

故当 $A_0=a_0$, $A_k=a_k$, $B_k=b_k$ 时原式取得最小值,即为 $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-\pi[\frac{a_0^2}{2}+\sum(a_k^2+b_k^2)]$

3. $b_n''=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\sin nx\,dx=-n^2b_n$

$\frac{1}{2}(2+\sum|b_n''|)\geq\frac{1}{2}\sum(\frac{1}{n^2}+|b_n''|)=\frac{1}{2}\sum[\frac{1}{n^2}+n^2(\sqrt{|b_n|})^2]\geq\sum\sqrt{|b_n|}\geq\sum_{k=1}^{n}\sqrt{|b_k|}$

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\sqrt{|b_k|}\leq\frac{1}{2}(2+\sum|b_k''|)$

4.

(1) $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(-t)\cos nt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)\cos nt\,dt=\alpha_n$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(-t)\sin nt\,dt=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)\sin nt\,dt=-\beta_n$

(2) 与 (1) 类似可得 $a_n=-\alpha_n$, $b_n=\beta_n$

5. 设 $S(x)=\sum a_n\varphi_n(x)$

$\int_a^b[f(x)-S(x)]^2dx=\int_a^b[f(x)]^2dx+\int_a^b[S(x)]^2dx-2\int_a^b f(x)S(x)dx$

$\int_a^b f(x)S(x)dx=\int_a^b f(x)\sum a_n\varphi_n(x)\,dx=\sum a_n\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx=\sum a_n^2$

同理 $\int_a^b[S(x)]^2dx=\sum a_n^2$

故 $0\leq\int_a^b[f(x)-S(x)]^2dx=\int_a^b[f(x)]^2dx-\sum a_n^2\Rightarrow\sum a_n^2\leq\int_a^b[f(x)]^2dx$

$\Rightarrow\sum a_n^2$ 收敛

习 题 16.1

1. 判断下列平面点集中哪些是开集、闭集、有界集、区域，并分别指出它们的聚点与界点：

(1) $[a,b)\times[c,d)$；　(2) $\{(x,y)\mid xy\neq 0\}$；

(3) $\{(x,y)\mid xy=0\}$；　(4) $\{(x,y)\mid y>x^2\}$；

(5) $\{(x,y)\mid x<2,y<2,x+y>2\}$；

(6) $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1$ 或 $y=0,0\leqslant x\leqslant 1\}$；

(7) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1$ 或 $y=0,1\leqslant x\leqslant 2\}$；

(8) $\{(x,y)\mid x,y$ 均为整数$\}$；　(9) $\{(x,y)\mid y=\sin\frac{1}{x},x>0\}$.

2. 试问集合 $\{(x,y)\mid 0<|x-a|<\delta,0<|y-b|<\delta\}$ 与集合 $\{(x,y)\mid |x-a|<\delta,|y-b|<\delta,(x,y)\neq(a,b)\}$ 是否相同？

3. 证明：当且仅当存在各点互不相同的点列 $\{P_n\}\subset E,P_n\neq P_0,\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$ 时，P_0 是 E 的聚点.

4. 证明：闭域必为闭集. 举例说明反之不真.

5. 对任何点集 $S\subset\mathbf{R}^2$，导集 S^d 亦为闭集.

6. 证明：点列 $\{P_n(x_n,y_n)\}$ 收敛于 $P_0(x_0,y_0)$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$.

7. 求下列各函数的函数值：

(1) $f(x,y)=\left[\dfrac{\arctan(x+y)}{\arctan(x-y)}\right]^2$，求 $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$；

(2) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，求 $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$；

(3) $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$，求 $f(tx,ty)$.

8. 设 $F(x,y)=\ln x\ln y$，证明：若 $u>0,v>0$，则

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

9. 求下列各函数的定义域，画出定义域的图形，并说明是何种点集：

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$；　(2) $f(x,y)=\dfrac{1}{2x^2+3y^2}$；

(3) $f(x,y)=\sqrt{xy}$；　(4) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$；

(5) $f(x,y)=\ln x+\ln y$；　(6) $f(x,y)=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$；

(7) $f(x,y)=\ln(y-x)$；　(8) $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$；

(9) $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2+y^2+1}$；　(10) $f(x,y,z)=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$　$(R>r)$.

---

10. 证明：开集与闭集具有对偶性——若 E 为开集，则 E^c 为闭集；若 E 为闭集，则 E^c 为开集.

11. 证明：

(1) 若 F_1,F_2 为闭集，则 $F_1\cup F_2$ 与 $F_1\cap F_2$ 都为闭集；

(2) 若 E_1,E_2 为开集，则 $E_1\cup E_2$ 与 $E_1\cap E_2$ 都为开集；

(3) 若 F 为闭集，E 为开集，则 $F\setminus E$ 为闭集，$E\setminus F$ 为开集.

12. 试把闭域套定理推广为闭集套定理，并证明之.

13. 证明定理 16.4（有限覆盖定理）.

14. 证明：设 $D\subset\mathbf{R}^2$，则 f 在 D 上无界的充要条件是存在 $\{P_k\}\subset D$，使 $\lim\limits_{k\to\infty}f(P_k)=\infty$.

1.

(1) 开集、有界集、区域

聚点：$[a,b]\times[c,d]$

界点：$\{a,b\}\times[c,d]\cup[a,b]\times\{c,d\}$

(2) 开集

聚点：$\mathbb{R}^2$

界点：$\{(x,y)\mid x=0$ 或 $y=0\}$

(3) 闭集

聚点：$\{(x,y)\mid x=0$ 或 $y=0\}$

界点：$\{(x,y)\mid x=0$ 或 $y=0\}$

(4) 开集、区域

聚点：$\{(x,y)\mid y\geq x^2\}$

界点：$\{(x,y)\mid y=x^2\}$

(5) 开集、有界集

聚点：$\{(x,y)\mid x\leq 2,\ y\leq 2,\ x+y\geq 2\}$

界点：$\{2\}\times[0,2]\cup[0,2]\times\{2\}\cup\{(x,y)\mid x+y=2,\ x\in[0,2]\}$

(6) 闭集、有界集

聚点：$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1$ 或 $y=0,\ 0\leq x\leq 1\}$

界点：$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1$ 或 $y=0,\ 0\leq x\leq 1\}$

(7) 闭集、有界集

聚点：$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1$ 或 $y=0,\ 1\leq x\leq 2\}$

界点：$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1$ 或 $y=0,\ 1\leq x\leq 2\}$

(8) 闭集

聚点：$\varnothing$

界点：$\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Z}\}$

(9) 非开非闭的无界集

聚点：$\{(0,0)\}\cup\{(x,y)\mid y=\sin\frac{1}{x}\}$

界点：$\{(0,0)\}\cup\{(x,y)\mid y=\sin\frac{1}{x}\}$

2. 不同

$\{(x,y)\mid |x-a|<\delta, |y-b|<\delta, (x,y)\neq(a,b)\} \setminus \{(x,y)\mid 0<|x-a|<\delta, 0<|y-b|<\delta\} = \{(x,y)\mid x\in(a-\delta,0)\cup(0,a+\delta), y=0\}\cup\{(x,y)\mid x=0,$
$y\in(b-\delta,0)\cup(0,b+\delta)\}$

3. $\Rightarrow)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = P_0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0$ s.t. $\forall n>N, \rho(P_0,P_n)<\varepsilon$

$\forall m,n>N, P_m\neq P_n\neq P_0 \Rightarrow P_0$是聚点

$\Leftarrow)$ 令$\varepsilon_1=1$，P_0是聚点$\Rightarrow \exists P_1\in E$ s.t. $P_1\neq P_0, \rho(P_0,P_1)<\varepsilon_1$

令$\varepsilon_n=\min\{\frac{1}{n}, \rho(P_0,P_{n-1})\}$，$n=2,3,\dots$，$P_0$是聚点$\Rightarrow \exists P_n\in E$ s.t. $P_n\neq P_0, \rho(P_0,P_n)<\varepsilon_n$

即得$\{P_n\}$满足要求

4. 闭域为开域及其边界，故必包含所有内点与界点

又聚点只可能为内点或界点，故闭域必包含所有聚点

故闭域必为闭集

反之，$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$是闭集，但不是闭域.

5. $\forall P\in S^d$，$\forall\varepsilon>0$，$U(P;\frac{\varepsilon}{2})$中存在无限个点

设T为$U(P;\frac{\varepsilon}{2})$的界点集，则$\forall Q\in T$，$U(Q;\frac{\varepsilon}{2})$中存在无限个点，否则与$U(P;\frac{\varepsilon}{2})$中存在无限个点矛盾！

故T中任意一点均为聚点$\Rightarrow U(P;\varepsilon)$内存在无限个聚点$\Rightarrow P$是$S^d$的聚点

故S^d的所有聚点均包含于$S^d\Rightarrow S^d$是闭集

6. $\Rightarrow)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=y_0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0$ s.t. $\forall n>N, |x_n-x_0|<\varepsilon, |y_n-y_0|<\varepsilon$

$\Rightarrow \rho(P_n,P_0)<\sqrt{2}\varepsilon$

由ε的任意性即证

$\Leftarrow)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n=P_0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0$ s.t. $\forall n>N, \rho(P_n,P_0)<\varepsilon$

$\Rightarrow |x_n-x_0|\le\rho(P_n,P_0)<\varepsilon, |y_n-y_0|\le\rho(P_n,P_0)<\varepsilon$

即证

7.

(1) $f(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2})=\frac{9}{16}$

(2) $f(1,\frac{y}{x})=\frac{2xy}{x^2+y^2}$

(3) $f(tx,ty)=t^2(x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y})$

8. $LHS=\ln xy\ln uv=\ln x\ln u+\ln x\ln v+\ln y\ln u+\ln y\ln v=RHS$

9.

(1) $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\mid x^2=y^2\}$

开集

(2) $D=\mathbb{R}^2$

开集，闭集，区域

(3) $D=\{(x,y)\mid xy\ge0\}$

闭集，区域

(4) $D=\{(x,y)\mid |x|\le1, |y|\ge1\}$

闭集

(5) $D=\{(x,y)\mid x>0, y>0\}$

开集，区域

(6) $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\in[2k\pi,(2k+1)\pi], k\in\mathbb{Z}\}$

闭集

(7) $D=\{(x,y)\mid x<y\}$

开集，区域

(8) $D=\mathbb{R}^2$

开集，闭集，区域

(9) $D=\mathbb{R}^3$

开集，闭集，区域

(10) $D=\{(x,y,z) \mid r^2<x^2+y^2+z^2\leq R^2\}$

开集，区域

10. 设 E 为开集

假设 E^c 不为闭集，则 $\exists P\notin E^c$ s.t. P 是 E^c 的聚点

$P\notin E^c \Rightarrow P\in E$

E 为开集 $\Rightarrow$ P 为 E 的内点 $\Rightarrow \exists \varepsilon$ s.t. $U(P;\varepsilon)\subseteq E \Rightarrow U(P;\varepsilon)\cap E^c=\varnothing$，与 P 是 E^c 的聚点矛盾！

故 E^c 为闭集

反之同理

11. 略

12. 略

13. 略

14. $\Rightarrow$) 显然

$\Leftarrow$) 令 $N_1=1$，f 在 D 上无界 $\Rightarrow \exists P_1$ s.t. $f(P_1)>N_1=1$

令 $N_k=\max\{f(P_1),\dots,f(P_{k-1}),k\}$，$f$ 在 D 上无界 $\Rightarrow \exists P_k$ s.t. $f(P_k)>N_k\geq k$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(P_n)=+\infty$，即证

习 题 16.2

1. 试求下列极限(包括非正常极限):

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$;　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$;　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy+1}{x^4+y^4}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{1}{2x-y}$;　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

2. 讨论下列函数在点(0,0)的重极限与累次极限:

(1) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$;　(2) $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$;

(3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$;　(4) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$;

(5) $f(x,y)=y\sin\dfrac{1}{x}$;　(6) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$;

(7) $f(x,y)=\dfrac{e^x-e^y}{\sin xy}$.

3. 证明:若 1° $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)$ 存在且等于 A;2° y 在 b 的某邻域内,有 $\lim\limits_{x\to a}f(x,y)=\varphi(y)$,则

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y)=A.$$

4. 试应用 $\varepsilon-\delta$ 定义证明

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$$

5. 叙述并证明:二元函数极限的惟一性定理、局部有界性定理与局部保号性定理.

---

6. 试写出下列类型极限的精确定义:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}f(x,y)=A$;　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,+\infty)}f(x,y)=A$.

7. 试求下列极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{x\sin y}$;　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,0)}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

8. 试作一函数 $f(x,y)$,使当 $x\to+\infty$,$y\to+\infty$ 时,

(1) 两个累次极限存在而重极限不存在;

(2) 两个累次极限不存在而重极限存在;

(3) 重极限与累次极限都不存在;

(4) 重极限与一个累次极限存在,另一个累次极限不存在.

9. 证明定理 16.5 及其推论 3.

10. 设 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U^\circ(P_0)$ 上有定义,且满足:

(i) 在 $U^\circ(P_0)$ 上,对每个 $y\neq y_0$,存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\psi(y)$;

(ii) 在 $U^\circ(P_0)$ 上,关于 x 一致地存在极限 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\varphi(x)$(即对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<|y-y_0|<\delta$ 时,对所有的 x,只要 $(x,y)\in U^\circ(P_0)$,都有 $|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon$ 成立).

试证明

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y).$$

1.

(1) $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=2\sqrt{\varepsilon}$ s.t. $\forall P\in U^\circ(P_0;\delta)$, $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leq\dfrac{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{x^2+y^2}=\dfrac{x^2+y^2}{4}<\dfrac{\delta^2}{4}=\varepsilon$

$\Rightarrow\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$

(2) $\forall M>0,\ \exists\delta=\dfrac{1}{\sqrt{M}}$ s.t. $\forall P\in U^\circ(P_0;\delta)$, $\dfrac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}=1+\dfrac{1}{x^2+y^2}>1+\dfrac{1}{\delta^2}=M+1>M$

$\Rightarrow\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}=+\infty$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{1+x^2+y^2}+1=2$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy+1}{x^4+y^4}=+\infty$

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{1}{2x-y}=+\infty$

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1$

2.

(1) $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=1$

$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在

(2) $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$ 不存在

$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ 不存在

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$

(3) $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=0$

$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=0$

$\lim\limits_{y=x,\ (x,y)\to(0,0)}f(x,y)=1\neq0\Rightarrow\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在

(4) $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=0$

$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=0$

$\lim\limits_{y=x^4-x^2,\ (x,y)\to(0,0)}f(x,y)=+\infty\neq0\Rightarrow(x,y)\to(0,0)$

(5) $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$ 不存在

$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$

(6) $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)=0$

$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)=0$

$y^3=x^4-x^3,\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1\neq0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在

(7) $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)$ 不存在

$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$ 不存在

$y=0,\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在 $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在

3. $y=0,\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=A \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\varphi(y)=A \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)=A$

4. $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\varepsilon$ s.t. $\forall P\in U^\circ(P_0;\delta)$, $\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=|x|\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{1}{2}|x|\leq\frac{1}{2}\rho(P,P_0)<\frac{1}{2}\delta=\frac{1}{2}\varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{(a,b)\to(0,0)} f(x,y)=0$

5.

(1) 唯一性定理：若 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ 存在，则其极限唯一.

证 设 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=B$

则 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ s.t. $\forall P\in U^\circ(P_0;\delta)$, $|f(x,y)-A|<\varepsilon$, $|f(x,y)-B|<\varepsilon$

$\Rightarrow |A-B|\leq|f(x,y)-A|+|f(x,y)-B|<2\varepsilon$

由 ε 的任意性得，$A=B$

(2) 局部有界性定理：若 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ 存在，则在 P_0 的某空心邻域 $U^\circ(P_0;\delta)$ 上，$f(x,y)$ 有界.

证 设 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$.

令 $\varepsilon=1$，则 $\exists\delta>0$ s.t. $\forall P\in U^\circ(P_0;\delta)$, $|f(x,y)-A|<\varepsilon \Rightarrow A-1<f(x,y)<A+1$，即证.

(3) 局部保号性：若 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A>0$，则 $\forall r\in(0,A)$, $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in U^\circ(P_0;\delta)$, $f(x,y)>r>0$.

证 令 $\varepsilon=A-r$ 即证.

6.

(1) $\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0$ s.t. $\forall x>N,\ y>N$, $|f(x,y)-A|<\varepsilon$

(2) $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ N>0$ s.t. $\forall 0<|x-0|<\delta,\ y>N$, $|f(x,y)-A|<\varepsilon$

7.

(1) $\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\leq\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$

$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0$

(2) 当 $x>2$ 时，$e^x>x^2 \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}<\frac{e^x+e^y}{e^{x+y}}=\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^y}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^y}=0 \Rightarrow \lim\limits_{(0,0)\to(+\infty,+\infty)}\frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}=0$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{x\sin y}=\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{xy}\right)^{\frac{\sin y}{y}}=e^1=e$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,0)}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,0)}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{\frac{x}{x+y}}=e^1=e$

8.

(1) $f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$

$\lim\limits_{y\to+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,y)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to+\infty} f(x,y)=0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y)$ 不存在

(2) $f(x,y)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\sin x\sin y$

$\lim\limits_{y\to+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,y)$ 不存在

$\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to+\infty} f(x,y)$ 不存在

$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y)=0$

(3) $f(x,y)=\sin x\sin y$

$\lim\limits_{y\to+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,y)$ 不存在

$\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to+\infty} f(x,y)$ 不存在

$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y)$ 不存在

(4) $f(x,y)=\frac{1}{y}\sin x$

$\lim\limits_{y\to+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,y)$ 不存在

$\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to+\infty} f(x,y)=0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y)=0$

9. 略

10. 略

习 题 16.3[1]

1. 讨论下列函数的连续性：

(1) $f(x,y)=\tan(x^2+y^2)$；

(2) $f(x,y)=[x+y]$；

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0;\end{cases}$

(4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

(5) $f(x,y)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数},\\ y, & x\text{ 为有理数};\end{cases}$

*(6) $f(x,y)=\begin{cases}y^2\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

*(7) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$；

*(8) $f(x,y)=e^{-\frac{x}{y}}$.

2. 叙述并证明二元连续函数的局部保号性.

3. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{(x^2+y^2)^p}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}\quad (p>0),$$

试讨论它在点 $(0,0)$ 处的连续性.

4. 设 $f(x,y)$ 定义在闭矩形域 $S=[a,b]\times[c,d]$ 上. 若 f 对 y 在 $[c,d]$ 上处处连续，对 x 在 $[a,b]$ 上（且关于 y）一致连续，证明 f 在 S 上处处连续.

5. 证明：若 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是有界闭域，f 为 D 上连续函数，且 f 不是常数函数，则 $f(D)$ 不仅有界（定理 16.8），而且是闭区间.

6. 设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，又有函数列 $\{\varphi_k(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，且

$$c\leqslant\varphi_k(x)\leqslant d,\quad x\in[a,b],\quad k=1,2,\cdots.$$

试证 $\{F_k(x)\}=\{f(x,\varphi_k(x))\}$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛.

---

7. 设 $f(x,y)$ 在区域 $G\subset\mathbf{R}^2$ 上对 x 连续，对 y 满足利普希茨条件：

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

其中 $(x,y'),(x,y'')\in G$，L 为常数. 试证明 f 在 G 上处处连续.

8. 若一元函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，令

$$f(x,y)=\varphi(x),\quad (x,y)\in D=[a,b]\times(-\infty,+\infty).$$

试讨论 f 在 D 上是否连续，是否一致连续？

9. 设

$$f(x,y)=\frac{1}{1-xy},\quad (x,y)\in D=[0,1)\times[0,1).$$

证明 f 在 D 上连续，但不一致连续.

10. 设 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上分别对每一自变量 x 和 y 是连续的，并且每当固定 x 时 f 对 y 是单调的，证明 f 是 $\mathbf{R}^2$ 上的二元连续函数.

1.

(1) 在 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq \frac{2k-1}{2}\pi,\ k\in N^+\}$ 上连续

(2) 在 $\{(x,y)\mid x+y\neq k,\ k\in\mathbb{Z}\}$ 上连续

(3) 在 $\{(x,y)\mid y\neq 0\}$ 上连续

(4) 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续

(5) 在 $\{(x,y)\mid y=0\}$ 上连续

(6) 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续

(7) 在 $\{(x,y)\mid x,y\neq n\pi,\ n\in N\}$ 上连续

(8) 在 $\{(x,y)\mid y\neq 0\}$ 上连续

2. 局部保号性：若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续，且 $f(x_0,y_0)\neq 0$，则 $\exists\delta>0$ s.t. $f(x,y)$ 在 $U(P_0;\delta)$ 内与 $f(x_0,y_0)$ 同号，且存在 $r>0$ s.t. $\forall (x,y)\in U(P_0;\delta)$，$|f(x,y)|\geq r>0$.

证 令 $\varepsilon=\frac{1}{2}|f(x_0,y_0)-r|$ 即证.

3. 设 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$，则 $\left|\frac{x}{(x^2+y^2)^p}\right|=\left|\frac{r\cos\theta}{r^{2p}}\right|\leq\frac{1}{r^{2p-1}}$

当 $p<\frac{1}{2}$ 时，$\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{r^{2p-1}}=0$

当 $p\geq\frac{1}{2}$ 时，$\lim\limits_{y=0,(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{(x^2+y^2)^p}=\begin{cases}1, & p=\frac{1}{2}\\ +\infty, & p>\frac{1}{2}\end{cases}$

综上，当 $p<\frac{1}{2}$ 时，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续

4. 设 $(x_0,y_0)\in S$.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$ s.t. $\forall|y-y_0|<\delta_1$, $|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\exists\delta_2>0$ s.t. $\forall|x-x_0|<\delta_2$, $|f(x,y)-f(x_0,y)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ s.t. $\forall P\in U^\circ(P_0;\delta)$, $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$\Rightarrow f$ 在 S 上连续

5. 由最大、最小值定理与介值性定理即证.

6. 设 $\lim\limits_{k\to+\infty}\varphi_k(x)=\varphi(x)$，$\lim\limits_{k\to+\infty}F_k(x)=F(x)=f(x,\varphi(x))$

$\forall\delta>0$, $\exists K>0$ s.t. $\forall k>K$, $x\in[a,b]$, $|\varphi_k(x)-\varphi(x)|<\delta$

设 $P_0(x_0,\varphi(x_0))\in[a,b]\times[c,d]$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0;\delta)$, $|F_k(x)-F_k(x_0)|<\varepsilon$

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists K>0$ s.t. $\forall k>K$, $x\in[a,b]$, $|F_k(x)-F(x)|<\varepsilon$

$\Rightarrow F_k$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛

7. 设 $P_0(x_0,y_0)\in G$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$ s.t. $\forall|x-x_0|<\delta_1$, $|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$

令 $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2L}$，则 $\forall |y-y_0|<\delta_2$，$|f(x,y_0)-f(x,y)| < L\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0$，$\exists \delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ s.t. $\forall P\in U^\circ(P_0;\delta)$，$|f(x,y)-f(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$\Rightarrow f$ 在 G 上处处连续

8. $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow \varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续

易推知，f 在 D 上

9. 显然 f 在 D 上连续.

令 $P_1=(\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1})$，$P_2=(\frac{n-1}{n}, \frac{n-1}{n})$

显然，$\forall \delta>0$，$\exists n>0$ s.t. $\rho(P_1,P_2)<\delta$

又 $|f(P_1)-f(P_2)| = \frac{2n^2-1}{4n^2-1} > \frac{1}{2}$

故 f 在 D 上不一致连续

10. $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta_1>0$ s.t. $\forall |y-y_0|<\delta_1$，$|f(y_0,y)-f(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists \delta_2>0$ s.t. $\forall |x-x_0|<\delta_2$，$|f(x,y_0-\delta_1)-f(x_0,y_0-\delta_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$，$|f(x,y_0+\delta_1)-f(x_0,y_0+\delta_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$

又 $f(x,y)$ 对 y 单调，故 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ s.t. $\forall P\in U^\circ(P_0;\delta)$，$|f(x,y)-f(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

故 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

第十六章总练习题

1. 设 $E\subset\mathbf{R}^2$ 是有界闭集，$d(E)$ 为 E 的直径. 证明：存在 $P_1,P_2\in E$，使得

$$\rho(P_1,P_2)=d(E).$$

2. 设 $E\subset\mathbf{R}^2$. 试证 E 为闭集的充要条件是 $E=E\cup\partial E$ 或 $E^c=\mathrm{int}\,E^c$.

3. 设 $f(x,y)=\frac{1}{xy}$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$k>1$，

$$D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{k}x\leqslant y\leqslant kx\right\},$$

$$D_2=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}.$$

试分别讨论 $i=1,2$ 时极限 $\lim\limits_{\substack{r\to+\infty\\(x,y)\in D_i}} f(x,y)$ 是否存在，为什么？

4. 设 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=\varphi(y_0)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=\psi(x_0)=0$，且在 (x_0,y_0) 附近有 $|f(x,y)-\varphi(y)|\leqslant\psi(x)$. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$.

5. 设 f 为定义在 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数，α 是任一实数，

$$E=\{(x,y)\mid f(x,y)>\alpha,(x,y)\in\mathbf{R}^2\},$$

$$F=\{(x,y)\mid f(x,y)\geqslant\alpha,(x,y)\in\mathbf{R}^2\}.$$

证明 E 是开集，F 是闭集.

6. 设 f 在有界开集 E 上一致连续. 证明：

(1) 可将 f 连续延拓到 E 的边界；

(2) f 在 E 上有界.

7. 设 $u=\varphi(x,y)$ 与 $v=\psi(x,y)$ 在 xy 平面中的点集 E 上一致连续. φ 与 ψ 把点集 E 映射为 uv 平面中的点集 D，$f(u,v)$ 在 D 上一致连续. 证明复合函数 $f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在 E 上一致连续.

8. 设 $f(t)$ 在区间 (a,b) 内连续可导，函数

$$F(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\quad(x\neq y),\quad F(x,x)=f'(x)$$

定义在区域 $D=(a,b)\times(a,b)$ 上. 证明：对任何 $c\in(a,b)$，有

$$\lim_{(x,y)\to(c,c)} f(x,y)=f'(c).$$

1. $d(E)=\sup\limits_{P,Q\in E}\rho(P,Q)\Rightarrow\forall\varepsilon_n=\frac{1}{n}$, $\exists P_n,Q_n\in E$ s.t. $\rho(P_n,Q_n)+\varepsilon_n>d(E)$

由致密性定理得，$\{P_n\},\{Q_n\}$ 存在收敛子列 $\{P_{n_k}\},\{Q_{n_k}\}$，设 $\lim\limits_{k\to+\infty}P_{n_k}=P_1$, $\lim\limits_{k\to+\infty}Q_{n_k}=P_2$

E 为有界闭集 $\Rightarrow P_1,P_2\in E$

故 $\rho(P_1,P_2)\leq d(E)\leq\rho(P_1,P_2)\Rightarrow\rho(P_1,P_2)=d(E)$

2. 略

3. (i) $i=1$

$\lim\limits_{r\to+\infty}x=\lim\limits_{r\to+\infty}y=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{(x,y)\in D_1,\,r\to+\infty}f(x,y)=0$

(ii) $i=2$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists x=\varepsilon$, $y=\frac{1}{\varepsilon^2}$ s.t. $\lim\limits_{(x,y)\in D_2,\,r\to+\infty}f(x,y)=\varepsilon$

故极限不存在

4. $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$ s.t. $\forall|y-y_0|<\delta_1$, $|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\exists\delta_2>0$ s.t. $\forall|x-x_0|<\delta_2$, $|\psi(x)-\psi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ s.t. $\forall P(x,y)\in U^\circ(P_0;\delta)$, $|f(x,y)-A|\leq|f(x,y)-\varphi(y)|+|\varphi(y)-A|\leq|\psi(x)|+|\varphi(y)-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$

5.

(1) $\forall P_0=(x_0,y_0)\in E$, $f(x_0,y_0)>\alpha$.

由保号性得，$\exists\delta>0$ s.t. $\forall P=(x,y)\in U^\circ(P_0;\delta)$, $f(x,y)>\alpha$

$\Rightarrow\mathrm{int}\,E=E\Rightarrow E$ 为开集

(2) 设 $P_0=(x_0,y_0)$ 为 F 的聚点

则存在一互异点列 $\{P_n\}\subseteq F$ s.t. $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n=P_0$

$f(x_n,y_n)\geq\alpha\Rightarrow f(x_0,y_0)\geq\alpha\Rightarrow P_0\in F$

故 F 为闭集

6. 略

7. $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ s.t. $\forall|u_1-u_2|<\delta$, $|v_1-v_2|<\delta$, $|f(u_1,v_1)-f(u_2,v_2)|<\varepsilon$

$\forall\delta>0$, $\exists\eta>0$ s.t. $\forall|x_1-x_2|<\eta$, $|y_1-y_2|<\eta$, $|u_1-u_2|=|\varphi(x_1,y_1)-\varphi(x_2,y_2)|<\delta$, $|v_1-v_2|=|\psi(x_1,y_1)-\psi(x_2,y_2)|<\delta$

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists\eta>0$ s.t. $\forall|x_1-x_2|<\eta$, $|y_1-y_2|<\eta$, $|f(\varphi(x_1,y_1),\psi(x_1,y_1))-f(\varphi(x_2,y_2),\psi(x_2,y_2))|<\varepsilon$

故 f 在 E 上一致连续

8. 由 Lagrange 中值定理得，$\exists\xi\in(x,y)$ s.t. $F(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\xi)$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(c,c)}F(x,y)=\lim\limits_{\xi\to c}f'(\xi)=f'(c)$

习 题 17.1

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^2y$；　(2) $z=y\cos x$；

(3) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　(4) $z=\ln(x+y^2)$；

(5) $z=e^{xy}$；　(6) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$；

(7) $z=xye^{\sin(xy)}$；　(8) $u=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}-\dfrac{x}{z}$；

(9) $u=(xy)^z$；　(10) $u=x^{y^z}$.

2. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 考察函数 f 在原点 $(0,0)$ 的偏导数.

4. 证明函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 连续但偏导数不存在.

5. 考察函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 的可微性.

6. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 连续且偏导数存在，但在此点不可微.

7. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 连续且偏导数存在，但偏导数在点 $(0,0)$ 不连续，而 f 在点 $(0,0)$ 可微.

8. 求下列函数在给定点的全微分：

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$ 在点 $(0,0)$，$(1,1)$；　(2) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在点 $(1,0)$，$(0,1)$.

9. 求下列函数的全微分：

(1) $z=y\sin(x+y)$；　(2) $u=xe^{yz}+e^{-z}+y$.

10. 求曲面 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$ 在点 $\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的切平面方程和法线方程.

11. 求曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 在点 $(3,1,1)$ 的切平面与法线方程.

12. 在曲面 $z=xy$ 上求一点，使这点的切平面平行于平面 $x+3y+z+9=0$，并写出此切平面方程和法线方程.

13. 计算近似值：

(1) $1.002\times 2.003^2\times 3.004^3$；　(2) $\sin 29°\times\tan 46°$.

14. 设圆台上、下底的半径分别为 $R=30$ cm，$r=20$ cm，高 $h=40$ cm. 若 R,r,h 分别增加3 mm，4 mm，2 mm，求此圆台体积变化的近似值.

---

15. 证明：若二元函数 f 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P)$ 上的偏导函数 f_x 与 f_y 有界，则 f 在 $U(P)$ 上连续.

16. 设二元函数 f 在区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续.

(1) 若在 int D 内有 $f_x\equiv 0$，试问 f 在 D 上有何特性？

(2) 若在 int D 内有 $f_x=f_y\equiv 0$，f 又怎样？

(3) 在(1)的讨论中，关于 f 在 D 上的连续性假设可否省略？长方形区域可否改为任意区域？

17. 试证在原点 $(0,0)$ 的充分小邻域内，有

$$\arctan\frac{x+y}{1+xy}\approx x+y.$$

18. 求曲面 $z=\dfrac{x^2+y^2}{4}$ 与平面 $y=4$ 的交线在 $x=2$ 处的切线与 Ox 轴的交角.

19. 试证：(1) 乘积的相对误差限近似于各因子相对误差限之和；

(2) 商的相对误差限近似于分子和分母相对误差限之和.

20. 测得一物体的体积 $V=4.45\ \text{cm}^3$，其绝对误差限为 $0.01\ \text{cm}^3$；又测得质量 $m=30.80$ g，其绝对误差限为 0.01 g. 求由公式 $\rho=\dfrac{m}{V}$ 算出的密度 ρ 的相对误差限和绝对误差限.

1.

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-y\sin x$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos x$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-x(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-y(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x+y^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{x+y^2}$

(5) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$

(6) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

(7) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y[1+xy\cos(xy)]e^{\sin(xy)}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x[1+xy\cos(xy)]e^{\sin(xy)}$

(8) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}-\dfrac{1}{z}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{z}{y^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{z^2}$

(9) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=x^{z-1}y^zz$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^zy^{z-1}z$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=(xy)^z\ln(xy)$

(10) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^zx^{y^z-1}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^{y^z}y^{z-1}z\ln x$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z}y^z(\ln x)(\ln y)$

2. $f(x,1)=x$，$f_x(x,1)=1$

3. $\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}$ 不存在

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)\Rightarrow f$ 在 $(0,0)$ 连续

$\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}$ 不存在

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\rho}=0$

故 f 在 $(0,0)$ 处可微

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)\Rightarrow f$ 在 $(0,0)$ 连续

$f_x(0,0)=0$，$f_y(0,0)=0$

$\lim\limits_{x=y,\,(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\rho}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$\lim\limits_{y=0,\,(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\rho}=0$

故 f 在 $(0,0)$ 不可微

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)\Rightarrow f$ 在 $(0,0)$ 连续

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)\neq f_x(0,0) \Rightarrow f_x$ 在 $(0,0)$ 不连续

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)\neq f_y(0,0) \Rightarrow f_y$ 在 $(0,0)$ 不连续

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\Delta f - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y}{\rho} = 0 \Rightarrow f$ 在 $(0,0)$ 可微

8.

(1) $f_x(x,y)=4x^3-8xy^2$, $f_y(x,y)=4y^3-8x^2y$

$dz|_{(0,0)}=f_x(0,0)dx+f_y(0,0)dy=0$

$dz|_{(1,1)}=f_x(1,1)dx+f_y(1,1)dy=-4dx-4dy$

(2) $f_x(x,y)=y^2(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$, $f_y(x,y)=-xy(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$

$dz|_{(1,0)}=f_x(1,0)dx+f_y(1,0)dy=0$

$dz|_{(0,1)}=f_x(0,1)dx+f_y(0,1)dy=dx$

9.

(1) $dz=z_x dx+z_y dy = y\cos(x+y)dx+[\sin(x+y)+y\cos(x+y)]dy$

(2) $du=u_x dx+u_y dy+u_z dz = e^{xy}dx+(xze^{yz}+1)dy+(xye^{yz}-e^{-z})dz$

10. $z_x(1,1)=-\frac{1}{2}$, $z_y(1,1)=\frac{1}{2}$

Π: $z-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1) \Rightarrow x-y+2z=\frac{\pi}{2}$

$l_\perp$: $\dfrac{x-1}{-\frac{1}{2}}=\dfrac{y-1}{\frac{1}{2}}=\dfrac{z-\frac{\pi}{4}}{-1}$

11. $z(x,y)=\sqrt{3x^2+y^2-27}$

$z_x(3,1)=9$, $z_y(3,1)=1$

Π: $z-1=9(x-3)+(y-1) \Rightarrow 9x+y-z-27=0$

$l_\perp$: $\dfrac{x-3}{9}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$

12. $z_x=1$, $z_y=3 \Rightarrow x=-3$, $y=-1 \Rightarrow z=3$, $P(-3,-1,3)$

Π: $z-3=(x+3)+3(y+1) \Rightarrow x+3y-z+3=0$

$l_\perp$: $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$

13. 略

14. 略

15. 设 $|f_x|<M$, $|f_y|<M$

$|\Delta z|=|f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)|=|f_x(x+\theta(\Delta x),y+\Delta y)\Delta x+f_y(x,y+\eta(\Delta y))\Delta y|\leq M|\Delta x|+M|\Delta y|$

故 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2M}$ s.t. $\forall(x,y)\in U^\circ(P;\delta)$, $|\Delta z|\leq M|\Delta x|+M|\Delta y|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$\Rightarrow f$ 在 $U(P)$ 上连续

16.

(1) $f(x,y)=\varphi(y)$

(2) $f(x,y)=constant$

(3) 不可以

17. 令 $z(x,y)=\arctan\dfrac{x+y}{1+xy}$

$\Delta z=z_x(0,0)\Delta x+z_y(0,0)\Delta y=\Delta x+\Delta y \Rightarrow z\approx x+y$

18. $z_x(2,4)=\tan\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}$

19.

(1) 设 $z=xy$, 则 $dz=ydx+xdy$

$\left|\frac{\Delta z}{z}\right|\approx\left|\frac{dz}{z}\right|=\left|\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\right|\leq\left|\frac{dx}{x}\right|+\left|\frac{dy}{y}\right|$

(2) 设 $z=\frac{x}{y}$, 则 $dz=\dfrac{ydx-xdy}{y^2}$

$\left|\frac{\Delta z}{z}\right|\approx\left|\frac{dz}{z}\right|=\left|\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\right|\leq\left|\frac{dx}{x}\right|+\left|\frac{dy}{y}\right|$

20. 略

习 题 17.2

1. 求下列复合函数的偏导数或导数：

(1) 设 $z=\arctan(xy)$，$y=e^x$，求 $\frac{dz}{dx}$；

(2) 设 $z=\frac{x^2+y^2}{xy}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$；

(3) 设 $z=x^2+xy+y^2$，$x=t^2$，$y=t$，求 $\frac{dz}{dt}$；

(4) 设 $z=x^2\ln y$，$x=\frac{u}{v}$，$y=3u-2v$，求 $\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$；

(5) 设 $u=f(x+y,xy)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$；

(6) 设 $u=f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$.

2. 设 $z=(x+y)^{xy}$，求 dz.

3. 设 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 f 为可微函数，验证
$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

4. 设 $z=\sin y+f(\sin x-\sin y)$，其中 f 为可微函数，证明
$$\frac{\partial z}{\partial x}\sec x+\frac{\partial z}{\partial y}\sec y=1.$$

5. 设 $f(x,y)$ 可微，证明：在坐标旋转变换
$$x=u\cos\theta-v\sin\theta,\quad y=u\sin\theta+v\cos\theta$$
之下，$(f_x)^2+(f_y)^2$ 是一个形式不变量. 即若
$$g(u,v)=f(u\cos\theta-v\sin\theta,u\sin\theta+v\cos\theta),$$
则必有 $(f_x)^2+(f_y)^2=(g_u)^2+(g_v)^2$（其中旋转角 θ 是常数）.

6. 设 $f(u)$ 是可微函数，$F(x,t)=f(x+2t)+f(3x-2t)$. 试求：
$$F_x(0,0)\text{ 与 }F_t(0,0).$$

---

7. 若函数 $u=F(x,y,z)$ 满足恒等式 $F(tx,ty,tz)=t^kF(x,y,z)$ $(t>0)$，则称 $F(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数. 试证下述关于齐次函数的欧拉定理：可微函数 $F(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数的充要条件是
$$xF_x(x,y,z)+yF_y(x,y,z)+zF_z(x,y,z)=kF(x,y,z).$$
并证明：$z=\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-xy$ 为 2 次齐次函数.

8. 设 $f(x,y,z)$ 具有性质 $f(tx,t^ky,t^mz)=t^nf(x,y,z)$ $(t>0)$，证明：

(1) $f(x,y,z)=x^nf\left(1,\frac{y}{x^k},\frac{z}{x^m}\right)$；

(2) $xf_x(x,y,z)+kyf_y(x,y,z)+mzf_z(x,y,z)=nf(x,y,z)$.

9. 设由行列式表示的函数
$$D(t)=\begin{vmatrix}a_{11}(t)&\cdots&a_{1n}(t)\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}(t)&\cdots&a_{nn}(t)\end{vmatrix},$$
其中 $a_{ij}(t)$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的导数都存在，证明
$$\frac{dD(t)}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}a_{11}(t)&\cdots&a_{1n}(t)\\ \vdots&&\vdots\\ a'_{k1}(t)&\cdots&a'_{kn}(t)\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}(t)&\cdots&a_{nn}(t)\end{vmatrix}.$$

1.

(1) $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$

$=\frac{y}{1+x^2y^2}+\frac{x}{1+x^2y^2}\cdot e^x$

$=\frac{(x+1)e^x}{1+x^2e^{2x}}$

(2) 记 $u=\frac{x^2+y^2}{xy}$，则 $z=ue^u$，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{x^2+y^2}{xy}+1\right)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\right)$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{x^2+y^2}{xy}+1\right)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)$

(3) $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

$=(2x+y)(2t)+(2y+x)$

$=(2t^2+t)(2t)+2t+t^2$

$=4t^3+3t^2+2t$

(4) $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$

$=(2x\ln y)\left(\frac{1}{v}\right)+\left(\frac{x^2}{y}\right)\cdot 3$

$=\left(\frac{2u}{v}\ln(3u-2v)\right)\cdot\frac{1}{v}+\frac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$

$=\frac{2u\ln(3u-2v)}{v^2}+\frac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$

$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$

$=(2x\ln y)\left(-\frac{u}{v^2}\right)+\left(\frac{x^2}{y}\right)(-2)$

$=\left(\frac{2u}{v}\ln(3u-2v)\right)\left(-\frac{u}{v^2}\right)-\frac{2u^2}{v^2(3u-2v)}$

$=-\frac{2u^2\ln(3u-2v)}{v^3}-\frac{2u^2}{v^2(3u-2v)}$

(5) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial(x+y)}\frac{\partial(x+y)}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial(xy)}\frac{\partial(xy)}{\partial x}=f_1(x+y,xy)+yf_2(x+y,xy)$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial(x+y)}\frac{\partial(x+y)}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial(xy)}\frac{\partial(xy)}{\partial y}=f_1(x+y,xy)+xf_2(x+y,xy)$

(6) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\frac{x}{y}}\frac{\partial\frac{x}{y}}{\partial x}=f_1\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)\cdot\frac{1}{y}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\frac{x}{y}}\frac{\partial\frac{x}{y}}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\frac{y}{z}}\frac{\partial\frac{y}{z}}{\partial y}=f_1\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+f_2\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)\cdot\frac{1}{z}$

$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial\frac{y}{z}}\frac{\partial\frac{y}{z}}{\partial z}=f_2\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)$

2. $\ln z=xy\ln(x+y)$

$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial\ln z}{\partial x}=y\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=(x+y)^{xy}\left(y\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y}\right)$

$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \ln z}{\partial y} = x\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = (x+y)^{xy}\left(x\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}\right)$

故 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (x+y)^{xy}\left(y\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}\right)dx + (x+y)^{xy}\left(x\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}\right)dy$

3. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(2xf'(x^2-y^2))}{(f(x^2-y^2))^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f(x^2-y^2) - y(-2yf'(x^2-y^2))}{(f(x^2-y^2))^2}$

$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{yf(x^2-y^2)} = \frac{z}{y^2}$

4. $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x f'(\sin x - \sin y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y - \cos y f(\sin x - \sin y)$

$\frac{\partial z}{\partial x}\sec x + \frac{\partial z}{\partial y}\sec y = f'(\sin x - \sin y) + 1 - f'(\sin x - \sin y) = 1$

5. $g_u = f_1(x,y)\cos\theta + f_2(x,y)\sin\theta$

$g_v = f_1(x,y)(-\sin\theta) + f_2(x,y)\cos\theta$

$\Rightarrow (g_u)^2 + (g_v)^2 = (f_1)^2 + (f_2)^2 = (f_x)^2 + (f_y)^2$

6. $F_x(x,t) = f'(x+2t) + 3f'(3x-2t) \Rightarrow F_x(0,0) = 4f'(0)$

$F_t(x,t) = 2f'(x+2t) - 2f'(3x-2t) \Rightarrow F_t(0,0) = 0$

7.

(1) $\Rightarrow$) 记 $\Phi(x,y,z,t) = t^{-k}F(tx,ty,tz)$

则 $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = t^{-k-1}\left[\sum x F_{tx}(tx,ty,tz) - kF(tx,ty,tz)\right] = 0$

$\Rightarrow \psi(x,y,z) = \Phi(x,y,z,t)$, $t^k\psi(x,y,z) = F(tx,ty,tz)$

令 $t=1$, 则 $\psi(x,y,z) = F(x,y,z)$, 即证.

$\Leftarrow$) $F(tx,ty,tz) = t^k F(x,y,z)$

两边对 t 求导得 $\sum x F_{tx}(tx,ty,tz) = kt^{k-1}F(x,y,z)$

令 $t=1$ 即证.

(2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+y^2}\right) - y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{2}{y} - \frac{y}{x^2+y^2}\right) - x$

$xF_x(x,y) + yF_y(x,y) = \frac{2xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2xy = 2z$

8.

(1) 令 $t=x$, $x=1$, $y=\frac{y}{x^k}$, $z=\frac{z}{x^m}$ 即证.

(2) $f(tx, t^k y, t^m z) = t^n f(x,y,z)$ —

两边对 t 求导得 $xf_{tx}(tx,t^ky,t^mz) + kt^{k-1}y f_{t^ky}(tx,t^ky,t^mz) + mt^{m-1}z f_{t^mz}(tx,t^ky,t^mz) = nt^{n-1}f(x,y,z)$

令 $t=1$ 即证.

9. 记 $x_{ij} = a_{ij}(t)$, 则 $D(t) = f(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn})$

$D'(t) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_{ij}}\frac{d_{ij}}{dt}$

又 $f(x_{11},\dots,x_{ij},\dots,x_{nn}) = \sum x_{ij}A_{ij}$, 则 $\frac{\partial f}{\partial x_{ij}} = A_{ij}$

故 $D'(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}(t)A_{ij}(t) = \sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1}(t) & a'_{i2}(t) & \cdots & a'_{in}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$

习 题 17.3

1. 求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $(1,1,2)$ 沿方向 l（其方向角分别为 $60°,45°,60°$）的方向导数.

2. 求函数 $u=xyz$ 在沿点 $A(5,1,2)$ 到点 $B(9,4,14)$ 的方向 $\overrightarrow{AB}$ 上的方向导数.

3. 求函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+xy-4x+2y-4z$ 在 $A=(0,0,0)$ 及 $B=\left(5,-3,\frac{2}{3}\right)$ 的梯度以及它们的模.

4. 设函数 $u=\ln\left(\frac{1}{r}\right)$，其中 $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$，求 u 的梯度，并指出在空间哪些点上成立等式 $|\mathbf{grad}\ u|=1$.

5. 设函数 $u=\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$，求它在点 (a,b,c) 的梯度.

6. 证明：

(1) $\mathbf{grad}(u+c)=\mathbf{grad}\ u$（$c$ 为常数）； (2) $\mathbf{grad}(\alpha u+\beta v)=\alpha\mathbf{grad}\ u+\beta\mathbf{grad}\ v$（$\alpha,\beta$ 为常数）；

(3) $\mathbf{grad}(uv)=u\mathbf{grad}\ v+v\mathbf{grad}\ u$； (4) $\mathbf{grad}\ f(u)=f'(u)\mathbf{grad}\ u$.

7. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，试求：

(1) $\mathbf{grad}\ r$； (2) $\mathbf{grad}\ \frac{1}{r}$.

8. 设 $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$，试问在怎样的点集上 $\mathbf{grad}\ u$ 分别满足：

(1) 垂直于 z 轴； (2) 平行于 z 轴；

(3) 恒为零向量.

9. 设 $f(x,y)$ 可微，l 是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个确定向量. 倘若处处有 $f_l(x,y)=0$，试问此函数 f 有何特征？

10. 设 $f(x,y)$ 可微，l_1 与 l_2 是 $\mathbf{R}^2$ 上的一组线性无关向量. 试证明：若 $f_{l_i}(x,y)=0\ (i=1,2)$，则 $f(x,y)=$ 常数.

1. $u_x(1,1,2)=-1,\ u_y(1,1,2)=0,\ u_z=(1,1,2)=11$

$u_l=u_x\cos\alpha+u_y\cos\beta+u_z\cos\gamma=5$

2. $u_x(5,1,2)=2,\ u_y(5,1,2)=10,\ u_z(5,1,2)=5$

$\cos\alpha=\frac{x}{\|\overrightarrow{AB}\|}=\frac{4}{13},\ \cos\beta=\frac{y}{\|\overrightarrow{AB}\|}=\frac{4}{13},\ \cos\gamma=\frac{z}{\|\overrightarrow{AB}\|}=\frac{12}{13}$

$u_l(5,1,2)=u_x\cos\alpha+u_y\cos\beta+u_z\cos\gamma=5$

3. $u_x=2x-4,\ u_y=4y+2,\ u_z=6z-4$

$\mathrm{grad}\ u(0,0,0)=(-4,2,-4)$. $|\mathrm{grad}\ u(0,0,0)|=6$

$\mathrm{grad}\ u(5,-3,\frac{2}{3})=(3,-5,0)$, $|\mathrm{grad}\ u(5,-3,\frac{2}{3})|=\sqrt{34}$

4. $\mathrm{grad}\ u=(\frac{a-x}{r^2},\frac{b-y}{r^2},\frac{c-z}{r^2})$

$|\mathrm{grad}\ u|=r=1\Rightarrow x^2+y^2+z^2=1$

5. $\mathrm{grad}\ u(a,b,c)=(-\frac{2}{a},-\frac{2}{b},-\frac{2}{c})$

6. 略

7.

(1) $\mathrm{grad}\ r=(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r})$

(2) $\mathrm{grad}\ \frac{1}{r}=(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3})$

8.

(1) $u_z=0\Rightarrow 2z=3xy$

(2) $u_x=0,\ u_y=0\Rightarrow 2x=3yz,\ 2y=3xz$

(3) $u_x=0,\ u_y=0,\ u_z=0\Rightarrow x^2=y^2=z^2$

9. $f_l(x,y)=f_x\cos\alpha+f_y\cos\beta=0\Rightarrow(f_x,f_y)\perp l$

10. $f_{l_1}(x,y)=0$, $f_{l_2}(x,y)=0\Rightarrow\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_2\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow f_x=f_y=0\Rightarrow f(x,y)=\text{constant}$

习 题 17.4

1. 求下列函数的高阶偏导数：

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$，所有二阶偏导数；

(2) $z=e^x(\cos y+x\sin y)$，所有二阶偏导数；

(3) $z=x\ln(xy)$，$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$，$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$；

(4) $u=xyze^{x+y+z}$，$\dfrac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$；

(5) $z=f(xy^2,x^2y)$，所有二阶偏导数；

(6) $u=f(x^2+y^2+z^2)$，所有二阶偏导数；

(7) $z=f\left(x+y,xy,\dfrac{x}{y}\right)$，$z_x$，$z_{xx}$，$z_{xy}$.

2. 设 $u=f(x,y)$，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$. 证明：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

3. 设 $u=f(r)$，$r^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$. 证明：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{du}{dr}.$$

4. 设 $v=\dfrac{1}{r}g\left(t-\dfrac{r}{c}\right)$，$c$ 为常数，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 证明：

$$v_{xx}+v_{yy}+v_{zz}=\frac{1}{c^2}v_{tt}.$$

5. 证明定理 17.8 的推论.

6. 通过对 $F(x,y)=\sin x\cos y$ 施用中值定理，证明对某 $\theta\in(0,1)$，有

$$\frac{3}{4}=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi\theta}{3}\cos\frac{\pi\theta}{6}-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi\theta}{3}\sin\frac{\pi\theta}{6}.$$

7. 求下列函数在指定点处的泰勒公式：

(1) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ 在点 $(0,0)$（到二阶为止）；

(2) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ 在点 $(1,1)$（到三阶为止）；

(3) $f(x,y)=\ln(1+x+y)$ 在点 $(0,0)$；

(4) $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在点 $(1,-2)$.

8. 求下列函数的极值点：

(1) $z=3axy-x^3-y^3$ $(a>0)$；

(2) $z=x^2-xy+y^2-2x+y$；

(3) $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$.

9. 求下列函数在指定范围内的最大值与最小值：

(1) $z=x^2-y^2$，$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$；

(2) $z=x^2-xy+y^2$，$\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$；

(3) $z=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$，$\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 2\pi\}$.

10. 在已知周长为 $2p$ 的一切三角形中，求出面积为最大的三角形.

11. 在 xy 平面上求一点，使它到三直线 $x=0$，$y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 的距离平方和最小.

12. 已知平面上 n 个点的坐标分别是

$$A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),\cdots,A_n(x_n,y_n),$$

试求一点，使它与这 n 个点距离的平方和最小.

---

13. 证明：函数 $u=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$（$a,b$ 为常数）满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

14. 证明：函数 $u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$（$a,b$ 为常数）满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

15. 证明：若函数 $u=f(x,y)$ 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

则函数 $v=f\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$ 也满足此方程.

16. 设函数 $u=\varphi(x+\psi(y))$，证明

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

17. 设 f_x，f_y 和 f_{yx} 在点 (x_0,y_0) 的某邻域上存在，f_{yx} 在点 (x_0,y_0) 连续，证明 $f_{xy}(x_0,y_0)$ 也存在，且 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

18. 设 f_x，f_y 在点 (x_0,y_0) 的某邻域上存在且在点 (x_0,y_0) 可微，则有

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0).$$

19. 设

$$u=\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}.$$

求：(1) $u_x+u_y+u_z$；(2) $xu_x+yu_y+zu_z$；(3) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$.

20. 设 $f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx$，试按 h,k,l 的正数幂展开 $f(x+h,y+k,z+l)$.

1.

(1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}(4x^3-8xy^2)=12x^2-8y^2$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(4x^3-8xy^2)=-16xy$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(4y^3-8x^2y)=-16xy$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}(4y^3-8x^2y)=12y^2-8x^2$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}(e^x(\cos y+x\sin y+\sin y))=e^x(\cos y+x\sin y+2\sin y)$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(e^x(\cos y+x\sin y+\sin y))=e^x(-\sin y+x\cos y+\cos y)$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(e^x(-\sin y+x\cos y))=e^x(-\sin y+x\cos y+\cos y)$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}(e^x(-\sin y+x\cos y))=e^x(-\cos y-x\sin y)$

(3) $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\ln(xy)+1)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$

$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(\ln(xy)+1)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{y}\right)=-\dfrac{1}{y^2}$

(4) $\dfrac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}=\dfrac{\partial^{q+r}}{\partial y^q\partial z^r}((x+p)yze^{x+y+z})=\dfrac{\partial^r}{\partial z^r}((x+p)(y+q)ze^{x+y+z})=(x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}$

(5) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}(y^2f_1+2xyf_2)=y^4f_{11}+2xy^3f_{12}+2yf_2+2xy^3f_{21}+4x^2y^2f_{22}$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(y^2f_1+2xyf_2)=2yf_1+2xy^3f_{11}+x^2y^2f_{12}+2xf_2+4x^2y^2f_{21}+2x^3yf_{22}$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(2xyf_1+x^2f_2)=2yf_1+2xy^3f_{11}+4x^2y^2f_{12}+2xf_2+x^2y^2f_{21}+2x^3yf_{22}$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}(2xyf_1+x^2f_2)=2xf_1+4x^2y^2f_{11}+2x^3yf_{12}+2x^3yf_{21}+x^4f_{22}$

(6) 略

(7) $z_x=f_1+yf_2+\dfrac{1}{y}f_3$

$z_{xx}=f_{11}+yf_{12}+\dfrac{1}{y}f_{13}+yf_{21}+y^2f_{22}+f_{23}+\dfrac{1}{y}f_{31}+f_{32}+\dfrac{1}{y^2}f_{33}$

$z_{xy}=f_{11}+xf_{12}-\dfrac{x}{y^2}f_{13}+f_2+yf_{21}+xyf_{22}-\dfrac{x}{y}f_{23}-\dfrac{1}{y^2}f_3+\dfrac{1}{y}f_{31}+\dfrac{x}{y}f_{32}-\dfrac{x}{y^3}f_{33}$

2. $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\cos\theta f_1+\sin\theta f_2$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\dfrac{\partial}{\partial r}(\cos\theta f_1+\sin\theta f_2)=\cos^2\theta f_{11}+\sin\theta\cos\theta f_{12}+\sin\theta\cos\theta f_{21}+\sin^2\theta f_{22}$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=\dfrac{\partial}{\partial\theta}(-r\sin\theta f_1+r\cos\theta f_2)=-r\cos\theta f_1+r^2\sin^2\theta f_{11}-r^2\sin\theta\cos\theta f_{12}-r\sin\theta f_2-r^2\sin\theta\cos\theta f_{21}+r^2\cos^2\theta f_{22}$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}f_1=f_{11}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}f_2=f_{22}$

代入即证

3. $\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{du}{dr}\cdot\frac{x_i}{r}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\cdot\frac{x_i^2}{r^2}+\frac{du}{dr}\left(\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3}\right)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\cdot\frac{du}{dr}$

4. $v_x=-\frac{x}{r^3}g-\frac{x}{cr^2}g'$, $v_{xx}=\frac{3x^2-r^2}{r^5}g+\frac{3x^2-r^2}{cr^4}g'+\frac{x^2}{c^2r^3}g''$

同理 $v_{yy}=\frac{3y^2-r^2}{r^5}g+\frac{3y^2-r^2}{cr^4}g'+\frac{y^2}{c^2r^3}g''$, $v_{zz}=\frac{3z^2-r^2}{r^5}g+\frac{3z^2-r^2}{cr^4}g'+\frac{z^2}{c^2r^3}g''$

$v_t=\frac{1}{r}g'$, $v_{tt}=\frac{1}{r}g''$

$LHS=v_{xx}+v_{yy}+v_{zz}=\frac{1}{c^2r}g''=\frac{1}{c^2}v_{tt}=RHS$

即证

5. 略

6. 由中值定理得, $\exists\theta\in(0,1)$ s.t. $F(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})=F(0,0)+F_x(\frac{\pi}{3}\theta,\frac{\pi}{6}\theta)\frac{\pi}{3}+F_y(\frac{\pi}{3}\theta,\frac{\pi}{6}\theta)\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi\theta}{3}\cos\frac{\pi\theta}{6}-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi\theta}{3}\sin\frac{\pi\theta}{6}$

7.

(1) $\sin(x^2+y^2)=x^2+y^2-2\theta(x^2+y^2)^2\sin(\theta^2x^2+\theta^2y^2)+\frac{4}{3}\theta^3(x^2+y^2)^3\cos(\theta^2x^2+\theta^2y^2)$

(2) $\frac{x}{y}=1+(x-1)-(y-1)-(x-1)(y-1)+(y-1)^2+(x-1)(y-1)^2-(y-1)^3-\frac{(x-1)(y-1)^3}{[1+\theta(y-1)]^4}+\frac{1+\theta(x-1)}{[1+\theta(y-1)]^5}(y-1)^4$

(3) $\ln(1+x+y)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(x+y)^k}{k}+(-1)^n\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x+\theta y)^{n+1}}$

(4) $2x^2-xy-6x-y^2-3y+5=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$

8.

(1) $z_x=3ay-3x^2$, $z_y=3ax-3y^2$

$z_{xx}=-6x$, $z_{xy}=3a$, $z_{yx}=3a$, $z_{yy}=-6y$

$z_x=z_y=0\Rightarrow P=(a,a)$

$f_{xx}(P)=-6a<0$, $(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P)=27a^2>0$

$\Rightarrow f$ 在 (a,a) 取极大值

(2) $z_x=2x-y-2$, $z_y=-x+2y+1$

$z_{xx}=2$, $z_{xy}=-1$, $z_{yx}=-1$, $z_{yy}=2$

$z_x=z_y=0\Rightarrow P=(1,0)$

$f_{xx}(P)=2>0$, $(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P)=3>0$

$\Rightarrow f$ 在 $(1,0)$ 取极小值

(3) $z_x=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)$, $z_y=2e^{2x}(y+1)$

$z_{xx}=4e^{2x}(x+y^2+y+1)$, $z_{xy}=4e^{2x}(y+1)$, $z_{yx}=4e^{2x}(y+1)$, $z_{yy}=2e^{2x}$

$z_x=z_y=0\Rightarrow P=(\frac{1}{2},-1)$

$f_{xx}(P)>\frac{1}{2}$, $(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P)>0$

$\Rightarrow f$ 在 $(\frac{1}{2},-1)$ 取极小值

9.

(1) $z_x=2x$, $z_y=-2y$

$z_{xx}=2$, $z_{xy}=0$, $z_{yx}=0$, $z_{yy}=-2$

$z_x=z_y=0\Rightarrow P=(0,0)$

$f_{xx}(P)>0$, $(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P)<0\Rightarrow P$ 不是极值点

故 $f_{max}=f(\pm2,0)=4$, $f_{min}=f(0,\pm2)=-4$

(2) $z_x=2x-y$, $z_y=2y-x$

$z_{xx}=2$, $z_{xy}=-1$, $z_{yx}=-1$, $z_{yy}=2$

$z_x=z_y=0\Rightarrow P=(0,0)$

$f_{xx}(P)>0,\ (f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P)>0 \Rightarrow P$为极小值点

故$f_{min}=f(P)=0,\ f_{max}=f(\pm1,0)=f(0,\pm1)=1$

(3) $z_x=\cos x-\cos(x+y),\ z_y=\cos y-\cos(x+y)$

$z_{xx}=-\sin x+\sin(x+y),\ z_{xy}=\sin(x+y),\ z_{yx}=\sin(x+y),\ z_{yy}=-\sin y+\sin(x+y)$

$z_x=z_y=0\Rightarrow P=(\frac{2\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3})$

$f_{xx}(P)>0,\ (f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P)<0\Rightarrow P$为极大值点

故$f_{max}=f(P)=\frac{3\sqrt{3}}{2},\ f_{min}=f|_{x=0,\,y=0,\,x+y=2\pi}=0$

10. $x+y+z=2p,\ S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$

$S_x=S_y=0\Rightarrow(x_0,y_0)=(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3})$

$S_{xx}(x_0,y_0)>0,\ (S_{xx}S_{yy}-S_{xy}^2)(x_0,y_0)<0\Rightarrow S_{max}=S(x_0,y_0)=\frac{\sqrt{3}}{9}p^2$

11. $S=x^2+y^2+\frac{(x+2y-16)^2}{5}$

$S_x=S_y=0\Rightarrow P=(\frac{8}{5},\ \frac{16}{5})$

$S_{xx}(P)>0,\ (S_{xx}S_{yy}-S_{xy}^2)(P)>0\Rightarrow S_{min}=S(P)$

12. $S=\sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]$

$S_x=S_y=0\Rightarrow P=(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i)$

$S_{xx}(P)>0,\ (S_{xx}S_{yy}-S_{xy}^2)(P)>0\Rightarrow S_{min}=S(P)$

13. 略

14. 略

15. 略

16. 略

17. 由Lagrange中值定理得，$\exists\theta_1,\theta_2\in(0,1)$ s.t. $F(\Delta x,\Delta y)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta x)\Delta x\Delta y$

又$f_{yx}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)=\left[\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)}{\Delta x}-\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\right]\frac{1}{\Delta y}$

令$\Delta x\to0$，得$f_{yx}(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)=\frac{f_x(x_0,y_0+\Delta y)-f_x(x_0,y_0)}{\Delta y}$

令$\Delta y\to0$，得$f_{yx}(x_0,y_0)=f_{xy}(x_0,y_0)$

18. 设$\varphi(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)$

则由Lagrange中值定理得，$\exists\theta\in(0,1)$ s.t. $F(\Delta x,\Delta y)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x$

$=[f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0)]\Delta x$

f_x在(x_0,y_0)处可微，故$F(\Delta x,\Delta y)=[f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0,y_0)]\Delta x-[f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0)-f_x(x_0,y_0)]\Delta x=[f_{xx}(x_0,y_0)\theta\Delta x+f_{xy}(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)-f_{xx}(x_0,y_0)\theta\Delta x-o(\rho)]\Delta x$

$=f_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y+o(\rho)\Delta x$

故$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{F(\Delta x,\Delta y)}{(\Delta x)(\Delta y)}=f_{xy}(x_0,y_0)$

同理$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{F(\Delta x,\Delta y)}{(\Delta x)(\Delta y)}=f_{yx}(x_0,y_0)$

故$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$

19. $u_x=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&y&z\\2x&y^2&z^2\end{vmatrix}=(y-z)(-2x+y+z),\ u_{xx}=2(z-y)$

同理 $u_y=(z-x)(x-2y+z),\ u_{yy}=2(x-z),\ u_z=(x-y)(x+y-2z),\ u_{zz}=2(y-x)$

(1) $u_x+u_y+u_z=0$

(2) $xu_x+yu_y+zu_z=3(x-y)(y-z)(z-x)$

(3) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$

20. $f(x+h,y+k,z+\ell)=f(x,y,z)+f_x h+f_y k+f_z\ell+\frac{1}{2}f_{xx}h^2+\frac{1}{2}f_{yy}k^2+\frac{1}{2}f_{zz}\ell^2+\frac{1}{2}(f_{xy}+f_{yx})hk+\frac{1}{2}(f_{xz}+f_{zx})h\ell+\frac{1}{2}(f_{yz}+f_{zy})k\ell$

$=f(x,y,z)+(2Ax+Dy+Fz)h+(2By+Dx+Ez)k+(2Cz+Ey+Fz)\ell+f(h,k,\ell)$

第十七章总练习题

1. 设 $f(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x$，证明

$$f_x+f_y+f_z=(x+y+z)^2.$$

2. 求函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点的偏导数 $f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$，并考察 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的可微性.

3. 设

$$u=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix},$$

证明：(1) $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=0$；　(2) $\sum_{k=1}^{n}x_k\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=\dfrac{n(n-1)}{2}u$.

4. 设函数 $f(x,y)$ 具有连续的 n 阶偏导数，试证函数 $g(t)=f(a+ht,b+kt)$ 的 n 阶导数

$$\frac{\mathrm{d}^n g(t)}{\mathrm{d}t^n}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+ht,b+kt).$$

5. 设

$$\varphi(x,y,z)=\begin{vmatrix}a+x & b+y & c+z\\ d+z & e+x & f+y\\ g+y & h+z & k+x\end{vmatrix},$$

求 $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$.

6. 设

$$\Phi(x,y,z)=\begin{vmatrix}f_1(x) & f_2(x) & f_3(x)\\ g_1(y) & g_2(y) & g_3(y)\\ h_1(z) & h_2(z) & h_3(z)\end{vmatrix},$$

求 $\dfrac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y\partial z}$.

7. 设函数 $u=f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上有 $u_{xy}=0$，试求 u 关于 x,y 的函数式.

8. 设 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，且在 P_0 给定了 n 个向量 l_i, $i=1,2,\cdots,n$，相邻两个向量之间的夹角为 $\dfrac{2\pi}{n}$. 证明

$$\sum_{i=1}^{n}f_{l_i}(P_0)=0.$$

1. $f_x=2xy+z^2$. $f_y=2yz+x^2$, $f_z=2zx+y^2$

$f_x+f_y+f_z=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=(x+y+z)^2$

2. $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=1$

$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=-1$

$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta z-dz}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\neq 0\Rightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微

3.

(1) $$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\begin{vmatrix}0 & 1 & & 1\\ 1 & x_2 & & x_n\\ 2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (n-1)x_1^{n-2} & x_2^{n-1} & & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$\sum_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=\begin{vmatrix}1 & 1 & & 1\\ x_1 & x_2 & & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{j-1} & x_2^{j-1} & \cdots & x_n^{j-1}\\ x_1^{j-1} & x_2^{j-1} & & x_n^{j-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=0$$

(2) u 是 $\frac{n(n-1)}{2}$ 次齐次函数 $\Rightarrow\sum_i x_i f_{x_i}=\dfrac{n(n-1)}{2}u$

4. 当 $n=1$ 时，$\dfrac{dg(t)}{dt}=(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y})f(a+ht,b+kt)$

假设当 $n=m$ 时，$\dfrac{d^m g(t)}{dt^m}=(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y})^m f(a+ht,b+kt)$

则 $\dfrac{d^{m+1}g(t)}{dt^{m+1}}=\dfrac{d}{dt}(\dfrac{d^m g(t)}{dt^m})=(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y})(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y})^m f(a+ht,b+kt)=(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y})^{m+1}f(a+ht,b+kt)$

即证

5. $$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\begin{vmatrix}1 & b+y & c+z\\ 0 & e+x & f+y\\ 0 & h+z & k+x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a+x & 0 & c+z\\ d+z & 1 & f+y\\ g+y & 0 & k+x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a+x & b+y & 0\\ d+z & e+x & 0\\ g+y & h+z & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e+x & f+y\\ h+z & k+x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a+x & c+z\\ g+y & k+x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a+x & b+y\\ d+z & e+x\end{vmatrix}$$

$\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=k+x+e+x+k+x+a+x+e+x+a+x=6x+2a+2e+2k$

6. $$\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y\partial z}=\begin{vmatrix}f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x)\\ g_1'(y) & g_2'(y) & g_3'(y)\\ h_1'(z) & h_2'(z) & h_3'(z)\end{vmatrix}$$

7. $u_{xy}=0\Rightarrow u_x=\varphi(x)\Rightarrow u=\int\varphi(x)dx+\psi(y)$

8. $f_{l_i}(P_0)=f_x(P_0)\cos\dfrac{2i\pi}{n}+f_y(P_0)\sin\dfrac{2i\pi}{n}$

$\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\dfrac{2i\pi}{n}=\dfrac{\sin\frac{(2n+1)\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}}-\dfrac{1}{2}=0$

$\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{2i\pi}{n}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sin\frac{(2n+1)\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}}=0$

$\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}f_{l_i}(P_0)=0$

习 题 18.1

1. 方程 $\cos x+\sin y=e^{xy}$ 能否在原点的某邻域上确定隐函数 $y=f(x)$ 或 $x=g(y)$?

2. 方程 $xy+z\ln y+e^{xz}=1$ 在点 $(0,1,1)$ 的某邻域上能否确定出某一个变量为另外两个变量的函数?

3. 求由下列方程所确定的隐函数的导数:

(1) $x^2y+3x^4y^3-4=0$, 求 $\frac{dy}{dx}$;

(2) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$;

(3) $e^{-xy}+2z-e^z=0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

(4) $a+\sqrt{a^2-y^2}=ye^u$, $u=\frac{x+\sqrt{a^2-y^2}}{a}$ $(a>0)$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$;

(5) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-5=0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

(6) $z=f(x+y+z, xyz)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial z}$.

4. 设 $z=x^2+y^2$, 其中 $y=f(x)$ 为由方程 $x^2-xy+y^2=1$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{dz}{dx}$ 及 $\frac{d^2z}{dx^2}$.

5. 设 $u=x^2+y^2+z^2$, 其中 $z=f(x,y)$ 是由方程 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ 所确定的隐函数, 求 u_x 及 u_{xx}.

6. 设 $F(x,y,z)=0$ 可以确定连续可微隐函数: $x=x(y,z)$, $y=y(z,x)$, $z=z(x,y)$, 试证: $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$ (偏导数不再是偏微分的商!).

---

7. 求由下列方程所确定的隐函数的偏导数:

(1) $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$, 求 z 对于 x, y 的一阶与二阶偏导数;

(2) $F(x, x+y, x+y+z)=0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

8. 证明: 设方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数, 则当 $F_y\neq 0$ 时, 有

$$F_y^3 y''=\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}.$$

9. 设 f 是一元函数, 试问应对 f 提出什么条件, 方程

$$2f(xy)=f(x)+f(y)$$

在点 $(1,1)$ 的邻域上就能确定出惟一的 y 为 x 的函数?

1. $F(x,y)=e^{xy}-\cos x-\sin y=0$

(i) F 在 $U((0,0))$ 上连续

(ii) $F(0,0)=0$

(iii) $F_y(x,y)=xe^{xy}-\cos y$, 在 $U((0,0))$ 上连续

(iv) $F_y(0,0)=-1\neq 0$

故能确定 $y=f(x)$.

2. $F(x,y,z)=xy+z\ln y+e^{xz}-1=0$, 记 $P=(0,1,1)$

(i) F 在 $U(P)$ 上连续

(ii) $F(P)=0$

(iii) $F_x(x,y,z)=y+ze^x$, 在 $U(P)$ 上连续

$F_y(x,y,z)=x+\frac{z}{y}$, 在 $U(P)$ 上连续

(iv) $F_x(P)=2\neq 0$, $F_y(P)=1\neq 0$

故能确定 $z=f(x,y)$

3.

(1) $F=x^2y+3x^4y^3-4$

$F_x=2xy+12x^3y^3$, $F_y=x^2+9x^4y^2$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{2y+12x^2y^3}{x+9x^3y^2}$

(2) $F=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}$

$F_x=\frac{x+y}{x^2+y^2}$, $F_y=\frac{y-x}{x^2+y^2}$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{x+y}{x-y}$

(3) $F=e^{-xy}+2z-e^z$

$F_x=-ye^{-xy}$, $F_y=-xe^{-xy}$, $F_z=2-e^z$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{ye^{-xy}}{2-e^z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xe^{xy}}{2-e^z}$

(4) $F=a+\sqrt{a^2-y^2}-ye^u$

$F_x=-\frac{ye^u}{a}$, $F_y=\frac{y}{a}-\frac{a}{y}-\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a^2y}{(a^2-y^2)^2}$

(5) $F=x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-5$

$F_x=2x-2$, $F_y=2y+2$, $F_z=2z-4$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x-1}{z-2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{y+1}{z-2}$

(6) $F=f(x+y+z, xyz)-z$

$F_x = f_1 + yzf_2$, $F_y = f_1 + xzf_2$, $F_z = f_1 + xyf_2 - 1$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{f_1 + yzf_2}{f_1 + xyf_2 - 1}$, $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x} = -\frac{f_1 + xzf_2}{f_1 + yzf_2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{f_1 + xzf_2}{f_1 + xyf_2 - 1}$

4. $F = x^2 - xy + y^2 - 1$

$F_x = 2x - y$, $F_y = -x + 2y$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{2x-y}{x-2y}$

$\frac{dz}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{4xy - 2y^2}{x-2y}$

$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{4x-2y}{x-2y} + \frac{6x^2(2x-y)}{(x-2y)^3}$

5. $F = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$F_x = 3x^2 - 3yz$, $F_z = 3z^2 - 3xy$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x^2 - yz}{z^2 - xy}$

$u_x = 2x + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - \frac{2x^2z - 2yz^2}{z^2 - xy}$

$u_{xx} = \frac{2xz(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)}{(xy - z^2)^3}$

6. $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x}$, $\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_y}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$

$\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$

7.

(1) $F = x + y + z - e^{-(x+y+z)}$

$F_x = 1 + e^{-(x+y+z)}$, $F_y = 1 + e^{-(x+y+z)}$, $F_z = 1 + e^{-(x+y+z)}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

(2) $F_x = F_1 + F_2 + F_3$, $F_y = F_2 + F_3$, $F_z = F_3$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{F_1 + F_2 + F_3}{F_3}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{F_2 + F_3}{F_3}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{F_3^2(F_{11} + 2F_{12} + F_{22}) - 2(F_1 + F_2)F_3(F_{13} + F_{23}) + (F_1 + F_2)^2 F_{33}}{F_3^3}$

8. $y' = -\frac{F_x}{F_y}$

$y'' = F_y^{-3}(2F_xF_yF_{xy} - F_y^2F_{xx} - F_x^2F_{yy})$

$\Rightarrow F_y^3 y'' = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}$

9. $F_y(1,1) = -f'(1)$

故只需 $f'(1) \neq 0$, f' 在 $U(1)$ 上连续即可

习 题 18.2

1. 试讨论方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{z^2}{2}, \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

在点 $(1,-1,2)$ 的附近能否确定形如 $x=f(z)$, $y=g(z)$ 的隐函数组?

2. 求下列方程组所确定的隐函数组的导数:

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^2+y^2=ax, \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$;

(2) $\begin{cases} x-u^2-yv=0, \\ y-v^2-xu=0, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$;

(3) $\begin{cases} u=f(ux,v+y), \\ v=g(u-x,v^2y), \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

3. 求下列函数组所确定的反函数组的偏导数:

(1) $\begin{cases} x=e^u+u\sin v, \\ y=e^u-u\cos v, \end{cases}$ 求 u_x, v_x, u_y, v_y;

(2) $\begin{cases} x=u+v, \\ y=u^2+v^2, \\ z=u^3+v^3, \end{cases}$ 求 z_x.

4. 设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程组

$$x=e^{u+v},\ y=e^{u-v},\ z=uv$$

(u,v 为参量)所定义的函数,求当 $u=0,v=0$ 时的 dz.

5. 设以 u,v 为新的自变量变换下列方程:

(1) $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, 设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\arctan\dfrac{y}{x}$;

(2) $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 设 $u=xy$, $v=\dfrac{x}{y}$.

6. 设函数 $u=u(x,y)$ 由方程组

$$u=f(x,y,z,t),\quad g(y,z,t)=0,\quad h(z,t)=0$$

所确定,求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

7. 设 $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$ 和 $x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$, $z=z(s,t)$ 都有连续的一阶偏导数. 证明

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}.$$

8. 设 $u=\dfrac{y}{\tan x}$, $v=\dfrac{y}{\sin x}$. 证明:当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $y>0$ 时, u,v 可以用来作为曲线坐标,解出 x,y 作为 u,v 的函数,画出 xy 平面上 $u=1,v=2$ 所对应的坐标曲线,计算 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ 和 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 并验证它们互为倒数.

9. 将以下式中的 (x,y,z) 变换成球面坐标 (r,θ,φ) 的形式:

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

10. 设 $u=\dfrac{x}{r^2}$, $v=\dfrac{y}{r^2}$, $w=\dfrac{z}{r^2}$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(1) 试求以 u,v,w 为自变量的反函数组;

(2) 计算 $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$.

1. $F=x^2+y^2-\frac{1}{2}z^2$, $G=x+y+z-2$

(i) F,G 在 $U((1,-1,2))$ 上连续

(ii) $F(1,-1,2)=G(1,-1,2)=0$

(iii) F,G 在 $U((1,-1,2))$ 有一阶偏导数

(iv) $J|_{P_0}=\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{P_0}=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0$

故能确定

2.

(1) $\begin{cases} 2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 2x+2y\dfrac{dy}{dx}=a \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a-2x}{2y}$, $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{a}{2z}$

(2) $\begin{cases} 1-2u\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ -2v\dfrac{\partial v}{\partial x}-u-x\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2v+yu}{4uv-xy}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{2u^2+x}{xy-4uv}$

$\begin{cases} -2u\dfrac{\partial u}{\partial y}-v-y\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ 1-2v\dfrac{\partial v}{\partial y}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2v^2+y}{xy-4uv}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{2u+xy}{4uv-xy}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=(u+\dfrac{\partial u}{\partial x})f_1+\dfrac{\partial v}{\partial x}f_2 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=(\dfrac{\partial u}{\partial x}-1)g_1+2vy\dfrac{\partial v}{\partial x}g_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{u(1-2vyg_2)f_1-f_2g_1}{(1-xf_1)(1-2vyg_2)-f_2g_1}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{(xf_1-1)g_1+uf_1g_1}{(1-xf_1)(1-2vyg_2)-f_2g_1}$

3.

(1) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} e^u+\sin v & u\cos v \\ e^u-\cos v & u\sin v \end{vmatrix}=u(e^u\sin v-e^u\cos v+1)$

$u_x=\dfrac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}=\dfrac{\sin v}{e^u\sin v-e^u\cos v+1}$

$v_x=-\dfrac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}=\dfrac{\cos v-e^u}{u(e^u\sin v-e^u\cos v+1)}$

$u_y=-\dfrac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}=\dfrac{-\cos v}{e^u\sin v-e^u\cos v+1}$

$v_y=\dfrac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}=\dfrac{e^u+\sin v}{u(e^u\sin v-e^u\cos v+1)}$

(2) $\begin{cases} 1=u_x+v_x \end{cases}$

$$\begin{cases} 0 = 2uu_x + 2vv_x \\ z_x = 3u^2 u_x + 3v^2 v_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_x = -3uv$$

4. $z_x = vu_x + uv_x$, $z_y = vu_y + uv_y$

$$dz = z_x dx + z_y dy \Rightarrow dz|_{u=v=0} = 0$$

5.

(1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial v}$$

代入得 $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial v}$

(2) $\frac{\partial u}{\partial x} = y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{x}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}$$

代入得 $2u\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial z}{\partial v}$

6. $$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = f_x + f_z\frac{\partial z}{\partial x} + f_t\frac{\partial t}{\partial x} \\ g_z\frac{\partial z}{\partial x} + g_t\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \\ h_z\frac{\partial z}{\partial x} + h_t\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = f_x$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = f_y + f_z\frac{\partial z}{\partial y} + f_t\frac{\partial t}{\partial y} \\ g_y + g_z\frac{\partial z}{\partial y} + g_t\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \\ h_z\frac{\partial z}{\partial y} + h_t\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = f_y + \frac{\frac{\partial(h,f)}{\partial(z,t)}}{\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}} g_y$$

7. 变形即证

8. $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = -\frac{y}{\sin x}$

$$\begin{cases} u = \frac{y}{\tan x} \\ v = \frac{y}{\sin x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \arccos\frac{u}{v} \\ y = \sqrt{v^2 - u^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$$

9. $\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2$

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

10.

(1) $r^2 = \frac{1}{u^2+v^2+w^2}$

$$x = ur^2 = \frac{u}{u^2+v^2+w^2}, \quad y = vr^2 = \frac{v}{u^2+v^2+w^2}, \quad z = wr = \frac{w}{u^2+v^2+w^2}$$

(2) $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = -\frac{1}{r^6}$

习 题 18.3

1. 求平面曲线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ $(a>0)$ 上任一点处的切线方程，并证明这些切线被坐标轴所截取的线段等长.

2. 求下列曲线在所示点处的切线与法平面:

(1) $x=a\sin^2 t, y=b\sin t\cos t, z=c\cos^2 t$，在点 $t=\frac{\pi}{4}$;

(2) $2x^2+3y^2+z^2=9, z^2=3x^2+y^2$，在点 $(1,-1,2)$.

3. 求下列曲面在所示点处的切平面与法线:

(1) $y-e^{2x-z}=0$，在点 $(1,1,2)$;

(2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，在点 $\left(\frac{a}{\sqrt3},\frac{b}{\sqrt3},\frac{c}{\sqrt3}\right)$.

4. 证明对任意常数 ρ,φ，球面 $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ 与锥面 $x^2+y^2=\tan^2\varphi\cdot z^2$ 是正交的.

5. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的切平面，使它平行于平面

$$x+4y+6z=0.$$

6. 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上求出一点，使曲线在此点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

---

7. 求函数

$$u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

在点 $M(1,2,-2)$ 沿曲线

$$x=t,\quad y=2t^2,\quad z=-2t^4$$

在该点切线的方向导数.

8. 试证明：函数 $F(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的梯度恰好是 F 的等值线在点 P_0 的法向量(设 F 有连续一阶偏导数).

9. 确定正数 λ，使曲面 $xyz=\lambda$ 与椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在某一点相切(即在该点有公共切平面).

10. 求 $x^2+y^2+z^2=x$ 的切平面，使其垂直于平面 $x-y-\frac12 z=2$ 和 $x-y-z=2$.

11. 求两曲面

$$F(x,y,z)=0,\ G(x,y,z)=0$$

的交线在 xy 平面上的投影曲线的切线方程.

1. $F_x(x_0,y_0)=\frac{2}{3}x_0^{-\frac{1}{3}}$, $F_y(x_0,y_0)=\frac{2}{3}y_0^{-\frac{1}{3}}$

切线: $\frac{2}{3}x_0^{-\frac13}(x-x_0)+\frac23 y_0^{-\frac13}(y-y_0)=0 \Rightarrow x_0^{-\frac13}x+y_0^{-\frac13}y=a^{\frac23}$

交点: $A(x_0^{\frac13}a^{\frac23},0)$, $B(0,y_0^{\frac13}a^{\frac23})$

$|AB|=\sqrt{(x_0^{\frac13}a^{\frac23})^2+(y_0^{\frac13}a^{\frac23})^2}=a$

2.

(1) $x(t)=\frac12 a$, $x'(t)=a$

$y(t)=\frac12 b$, $y'(t)=0$

$z(t)=\frac12 c$, $z'(t)=-c$

切线: $\frac{x-\frac12 a}{a}=\frac{z-\frac12 c}{-c}$, $y=\frac12 b$

法平面: $a(x-\frac12 a)-c(z-\frac12 c)=0$

(2) $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-9$, $G(x,y,z)=3x^2+y^2-z^2$

$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_P=32$, $\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_P=40$, $\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_P=28$

切线: $\frac{x-1}{32}=\frac{y+1}{40}=\frac{z-2}{28}$

法平面: $32(x-1)+40(y+1)+28(z-2)=0$

3.

(1) $F=y-e^{2x-z}$

$F_x(P)=-2$, $F_y(P)=1$, $F_z(P)=1$

切平面: $-2(x-1)+(y-1)+(z-2)=0$

法线: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}$

(2) $F=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$

$F_x(P)=\frac{2}{\sqrt3 a}$, $F_y(P)=\frac{2}{\sqrt3 b}$, $F_z(P)=\frac{2}{\sqrt3 c}$

切平面: $\frac1a(x-\frac{a}{\sqrt3})+\frac1b(y-\frac{b}{\sqrt3})+\frac1c(z-\frac{c}{\sqrt3})=0$

法线: $a(x-\frac{a}{\sqrt3})=b(y-\frac{b}{\sqrt3})=c(z-\frac{c}{\sqrt3})$

4. $\vec{n_1}=(2x,2y,2z)$, $\vec{n_2}=(2x,2y,-2z\tan^2\varphi)$

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=4(x^2+y^2-z^2\tan^2\varphi)=0$

5. Π: $2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0$

$$\begin{cases}\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{4}=\frac{6z_0}{6} \\ x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21\end{cases} \Rightarrow (x_0,y_0,z_0)=\pm(1,2,2)$$

$\Rightarrow \Pi_1: 2(x-1)+8(y-2)+12(z-2)=0$, $\Pi_2: -2(x+1)-8(y+2)-12(z+2)=0$

6. l: $\frac{x-t}{1}=\frac{y-t^2}{2t}=\frac{z-t^3}{3t^2}$

$(1,2t,3t^2)\cdot(1,2,1)=0 \Rightarrow t_1=-\frac13$, $t_2=-1$

$\Rightarrow l_1: \frac{x+\frac{1}{3}}{1}=\frac{y-\frac{1}{9}}{-\frac{2}{3}}=\frac{z+\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}}$, $l_2: \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{3}$

7. $l=(1,4,-8) \Rightarrow l_0=(\frac{1}{9},\frac{4}{9},-\frac{8}{9})$

$\text{grad}\, u(1,2,-2)=(\frac{8}{27},-\frac{2}{27},\frac{2}{27})$

$u_l(1,2,-2)=\text{grad}\, u(1,2,-2)\cdot l_0=-\frac{16}{243}$

8. $\text{grad}\, F(P_0)=(F_x(P_0),F_y(P_0))$

等值线：$F(x,y)=c \Rightarrow \vec{n}=(F_x(P_0),F_y(P_0))$

$\Rightarrow \text{grad}\, F(P_0)=\vec{n}$

9. $\Pi_1: y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0$

$\Pi_2: \frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0$

$$\begin{cases} x_0y_0z_0=\lambda \\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1 \\ \Pi_1=\Pi_2 \end{cases} \Rightarrow \lambda=\frac{|abc|}{3\sqrt{3}}$$

10. $\vec{n}=(2x_0-1,2y_0,2z_0)$

$\vec{n_1}=(1,-1,-\frac{1}{2})$, $\vec{n_2}=(1,-1,-1)$

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=x_0 \\ \vec{n}\cdot\vec{n_1}=0 \\ \vec{n}\cdot\vec{n_2}=0 \end{cases} \Rightarrow (x_0,y_0,z_0)=(\frac{2\pm\sqrt{2}}{4},\frac{2\pm\sqrt{2}}{4},0)$$

$\Rightarrow \Pi: x+y=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$

11. 对z求导得：$F_x\frac{dx}{dz}+F_y\frac{dy}{dz}+F_z=0$, $G_x\frac{dx}{dz}+G_y\frac{dy}{dz}+G_z=0$

$\Rightarrow \frac{dx}{dz}=\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(F,G)}$, $\frac{dy}{dz}=\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(F,G)}$

切线：$\frac{x-x_0}{\frac{dx}{dz}|_{P_0}}-\frac{y-y_0}{\frac{dy}{dz}|_{P_0}}=0$

习 题 18.4

1. 应用拉格朗日乘数法,求下列函数的条件极值:

(1) $f(x,y)=x^2+y^2$,若 $x+y-1=0$;

(2) $f(x,y,z,t)=x+y+z+t$,若 $xyzt=c^4$(其中 $x,y,z,t>0,c>0$);

(3) $f(x,y,z)=xyz$,若 $x^2+y^2+z^2=1,x+y+z=0$.

2. (1) 求表面积一定而体积最大的长方体;

(2) 求体积一定而表面积最小的长方体.

3. 求空间一点 (x_0,y_0,z_0) 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的最短距离.

---

4. 证明:在 n 个正数的和为定值条件

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=a$$

下,这 n 个正数的乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 的最大值为 $\frac{a^n}{n^n}$. 并由此结果推出 n 个正数的几何平均值不大于算术平均值

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

5. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为已知的 n 个正数,求

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k$$

在限制条件

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1$$

下的最大值.

6. 求函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

在条件

$$\sum_{k=1}^{n}a_kx_k=1\quad(a_k>0,k=1,2,\cdots,n)$$

下的最小值.

7. 利用条件极值方法证明不等式

$$xy^2z^3\leqslant 108\left(\frac{x+y+z}{6}\right)^6,\quad x>0,y>0,z>0.$$

提示:取目标函数 $f(x,y,z)=xy^2z^3$,约束条件为 $x+y+z=a$ ($x>0,y>0,z>0,a>0$).

1.

(1) $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$

$L_x=L_y=L_\lambda=0\Rightarrow(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\ \lambda=-1$

极小值: $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

(2) $L(x,y,z,t,\lambda)=x+y+z+t+\lambda(xyzt-c^4)$

$L_x=L_y=L_z=L_t=L_\lambda=0\Rightarrow(x,y,z,t)=(c,c,c,c)$

极小值: $f(c,c,c,c)=4c$

(3) $L(x,y,z,\lambda,\mu)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x+y+z)$

$L_x=L_y=L_z=L_\lambda=L_\mu=0$

$\Rightarrow$ 极小值: $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$, 极大值: $\frac{1}{3\sqrt{6}}$

2.

(1) $f(x,y,z)=xyz$, $2(xy+yz+zx)=a^2$

$L(x,y,z,\lambda)=xyz-\lambda[2(xy+yz+zx)-a^2]$

$L_x=L_y=L_z=L_\lambda=0\Rightarrow(x,y,z)=(\frac{a}{\sqrt{6}},\frac{a}{\sqrt{6}},\frac{a}{\sqrt{6}})$, 即为正方体

(2) $f(x,y,z)=2(xy+yz+zx)$, $xyz=V$

$L(x,y,z,\lambda)=2(xy+yz+zx)+\lambda(xyz-V)$

$L_x=L_y=L_z=L_\lambda=0\Rightarrow(x,y,z)=(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V})$, 即为正方体

3. $f(x,y,z)=d^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$, $Ax+By+Cz+D=0$

$L(x,y,z,\lambda)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+\lambda(Ax+By+Cz+D)$

$L_x=L_y=L_z=L_\lambda=0\Rightarrow(x,y,z)=(x_0-\frac{\lambda}{2}A,\ y_0-\frac{\lambda}{2}B,\ z_0-\frac{\lambda}{2}C)$

$d=\sqrt{f(x_0-\frac{\lambda}{2}A,\ y_0-\frac{\lambda}{2}B,\ z_0-\frac{\lambda}{2}C)}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

4. $f=\prod x_i$, $\sum x_i=a$

$L=\prod x_i+\lambda(\sum x_i-a)$

$L_{x_i}=L_\lambda=0\Rightarrow x_i=\frac{a}{n}$

极大值: $f(\frac{a}{n},\dots,\frac{a}{n})=\frac{a^n}{n^n}$

$\Rightarrow(\prod x_i)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum x_i$

5. $f=\sum a_ix_i$, $\sum x_i^2=a^2$

$L=\sum a_ix_i-\lambda(\sum x_i^2-a^2)$

$L_{x_i}=L_\lambda=0\Rightarrow x_i=\mp\frac{aa_i}{\sqrt{\sum a_i}}$

极大值: $f(x_1,\dots,x_n)=a\sqrt{\sum a_i^2}$

$\Rightarrow f_{max}=\sup\limits_{a\in(0,1]}a\sqrt{\sum a_i^2}=\sqrt{\sum a_i^2}$

6. $L=\sum x_i^2+\lambda(\sum a_i x_i -1)$

$L_{x_i}=L_\lambda=0 \Rightarrow x_i=-\frac{2}{\sum a_i^2}$

极小值：$f(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{\sum a_i^2}$

7. $f(x,y,z)=xy^2z^3$, $x+y+z=a$

$L(x,y,z,\lambda)=xy^2z^3+\lambda(x+y+z-a)$

$L_x=L_y=L_z=L_\lambda=0 \Rightarrow (x,y,z)=(\frac{1}{6}a,\frac{1}{3}a,\frac{1}{2}a)$

极大值：$f(x,y,z)=108\cdot(\frac{a}{6})^6$

$\Rightarrow xy^2z^3\leq 108(\frac{x+y+z}{6})^6$

第十八章总练习题

1. 方程 $y^2-x^2(1-x^2)=0$ 在哪些点的邻域上可惟一地确定连续可导的隐函数 $y=f(x)$？

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续，函数 $\varphi(y)$ 在区间 (c,d) 上连续，而且 $\varphi'(y)>0$. 问在怎样条件下，方程

$$\varphi(y)=f(x)$$

能确定函数

$$y=\varphi^{-1}(f(x)),$$

并研究例子：(i) $\sin y+\operatorname{sh} y=x$；(ii) $e^{-y}=-\sin^2 x$.

3. 设 $f(x,y,z)=0$，$z=g(x,y)$，试求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{dz}{dx}$.

4. 已知 $G_1(x,y,z)$，$G_2(x,y,z)$，$f(x,y)$ 都是可微的，

$$g_i(x,y)=G_i(x,y,f(x,y)),\ i=1,2.$$

证明

$$\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}-f_x & -f_y & 1\\ G_{1x} & G_{1y} & G_{1z}\\ G_{2x} & G_{2y} & G_{2z}\end{vmatrix}.$$

5. 设 $x=f(u,v,w)$，$y=g(u,v,w)$，$z=h(u,v,w)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$.

6. 试求下列方程所确定的函数的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$：

(1) $x^2+u^2=f(x,u)+g(x,y,u)$；　　(2) $u=f(x+u,yu)$.

7. 据理说明：在点 $(0,1)$ 近旁是否存在连续可微的 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$，满足 $f(0,1)=1$，$g(0,1)=-1$，且

$$[f(x,y)]^3+xg(x,y)-y=0,\ [g(x,y)]^3+yf(x,y)-x=0.$$

8. 设 (x_0,y_0,z_0,u_0) 满足方程组

$$f(x)+f(y)+f(z)=F(u),$$
$$g(x)+g(y)+g(z)=G(u),$$
$$h(x)+h(y)+h(z)=H(u),$$

这里所有的函数假定有连续的导数.

(1) 说出一个能在该点邻域上确定 x,y,z 为 u 的函数的充分条件；

(2) 在 $f(x)=x$，$g(x)=x^2$，$h(x)=x^3$ 的情形下，上述条件相当于什么？

9. 求由下列方程所确定的隐函数的极值：

(1) $x^2+2xy+2y^2=1$；　　(2) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(a>0)$.

10. 设 $y=F(x)$ 和一组函数 $x=\varphi(u,v)$，$y=\psi(u,v)$，那么由方程 $\psi(u,v)=F(\varphi(u,v))$ 可以确定函数 $v=v(u)$. 试用 $u,v,\frac{dv}{du},\frac{d^2v}{du^2}$ 表示 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

11. 试证明：二次型

$$f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy$$

在单位球面

$$x^2+y^2+z^2=1$$

上的最大值和最小值恰好是矩阵

$$\Phi=\begin{pmatrix}A & F & E\\ F & B & D\\ E & D & C\end{pmatrix}$$

的最大特征值和最小特征值.

12. 设 n 为正整数，$x,y>0$. 用条件极值方法证明：

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

提示：参照 §4 例 3 的思想方法，给出合适的约束条件.

13. 求出椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在第一卦限中的切平面与三个坐标面所成四面体的最小体积.

14. 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面 $F(x,y,z)=1$ 的非奇异点①，F 在 $U(P_0)$ 可微，且为 n 次齐次函数. 证明：此曲面在 P_0 处的切平面方程为

$$xF_x(P_0)+yF_y(P_0)+zF_z(P_0)=n.$$

1. $F_y=2y\neq 0\Rightarrow y\neq 0\Rightarrow x\neq 0,\ x\neq\pm 1$

故 $D=\{(x,y)\mid 0<|x|<1,\ 0<|y|\leq\frac{1}{2}\}$ 上有 $y=f(x)$.

2. 略

3. $\begin{cases}f(x,y,z)=0\\ z=g(x,y)\end{cases}$

对 x 求偏导得 $\begin{cases}f_x+\frac{dy}{dx}f_y+\frac{dz}{dx}f_z=0\\ \frac{dz}{dx}=g_x+\frac{dy}{dx}g_y\end{cases}$

解得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x+f_zg_x}{f_y+f_zg_y}$，$\frac{dz}{dx}=\frac{f_yg_x-f_xg_y}{f_y+f_zg_y}$

4. $\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}G_{1x}+G_{1z}f_x & G_{1y}+G_{1z}f_y\\ G_{2x}+G_{2z}f_x & G_{2y}+G_{2z}f_y\end{vmatrix}=f_x(G_{1z}G_{2y}-G_{1y}G_{2z})+f_y(G_{1x}G_{2z}-G_{2x}G_{1z})+(G_{1x}G_{2y}-G_{1y}G_{2x})$

$\begin{vmatrix}-f_x & -f_y & 1\\ G_{1x} & G_{1y} & G_{1z}\\ G_{2x} & G_{2y} & G_{2z}\end{vmatrix}=f_x(G_{1z}G_{2y}-G_{1y}G_{2z})+f_y(G_{1x}G_{2z}-G_{2x}G_{1z})+(G_{1x}G_{2y}-G_{1y}G_{2x})$

即证.

5. 对 x 求偏导得 $\begin{pmatrix}f_u & f_v & f_w\\ g_u & g_v & g_w\\ h_u & h_v & h_w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial w}{\partial x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\frac{\partial(g,h)}{\partial(v,w)}}{\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}}$

同理 $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\frac{\partial(h,f)}{\partial(w,u)}}{\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}}$

6.

(1) 对 x 求偏导得 $2x+2u\frac{\partial u}{\partial x}=f_x+\frac{\partial u}{\partial x}f_u+g_x+\frac{\partial u}{\partial x}g_u$

$\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f_x+g_x-2x}{2u-f_u-g_u}$

同理 $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{g_y}{2u-f_u-g_u}$

(2) 对 x 求偏导得 $\frac{\partial u}{\partial x}=(1+\frac{\partial u}{\partial x})f_1+y\frac{\partial u}{\partial x}f_2$

$\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f_1}{1-f_1-yf_2}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{uf_2}{1-f_1-yf_2}$

7. 令 $F(x,y,u,v)=u^3+xv-y=0$，$G(x,y,u,v)=v^3+yu-x=0$

此时 $u=f(x,y)$，$v=g(x,y)$ 即满足条件

8.

(1) 设 $F_0(x,y,z,u)=f(x)+f(y)+f(z)-F(u)=0$，类似设出 G_0，H_0.

只需 $\frac{\partial(F_0,G_0,H_0)}{\partial(x,y,z)}\Big|_{P_0}\neq 0$ 即可

(2) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_0 & y_0 & z_0\\ x_0^2 & y_0^2 & z_0^2\end{vmatrix}\neq 0\Leftrightarrow x_0,y_0,z_0$ 两两互异.

9.

(1) $F_x=2x+2y$，$F_y=2x+4y$

$F_x=0\Rightarrow x=\pm 1$

$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=1}=1>0$，$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=-1}=-1<0$

极小值 $y|_{x=1}=-1$，极大值 $y|_{x=-1}=1$

(2) $F_x = 0 \Rightarrow x = 0$ 或 $\pm\sqrt{\frac{3}{8}}a$

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(\pm\sqrt{\frac{3}{8}}a,\ \sqrt{\frac{1}{8}}a)} < 0$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(\pm\sqrt{\frac{3}{8}}a,\ -\sqrt{\frac{1}{8}}a)} > 0$

极小值 $y = -\sqrt{\frac{1}{8}}a$，极大值 $y = \sqrt{\frac{1}{8}}a$

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^{-1} = \frac{\psi_u + \frac{dv}{du}\psi_v}{\varphi_u + \frac{dv}{du}\varphi_v}$

11. 设 $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$

$L_x = L_y = L_z = L_\lambda = 0 \Rightarrow f(x,y,z) = \lambda$

故 λ 为亚特征值

即证

12. 设 $L(x,y,\lambda) = \frac{x^n+y^n}{2} + \lambda(x+y-a)$

$L_x = L_y = L_\lambda = 0 \Rightarrow (x,y) = (\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$

$\Rightarrow$ 极小值 $f(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}) = (\frac{a}{2})^n = (\frac{x+y}{2})^n$

即证

13. $f(x,y,z) = \frac{a^2b^2c^2}{6xyz}$

$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1)$

$L_x = L_y = L_z = 0 \Rightarrow (x,y,z) = (\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$

极小值 $f(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}) = \frac{\sqrt{3}}{2}abc$

14. F 是 n 次齐次函数 $\Rightarrow xF_x + yF_y + zF_z = nF = n$

切平面：$F_x(P_0)(x-x_0) + F_y(P_0)(y-y_0) + F_z(P_0)(z-z_0) = 0 \Rightarrow xF_x(P_0) + yF_x(P_0) + zF_x(P_0) = x_0F_x(P_0) + y_0F_y(P_0) + z_0F_z(P_0) = n$

即证

习 题 19.1

1. 设 $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)$（这个函数在 $x=y$ 时不连续），试证由含参量积分

$$F(y)=\int_0^1 f(x,y)\,dx$$

所确定的函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，并作函数 $F(y)$ 的图像.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$； (2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx$.

3. 设 $F(x)=\int_x^{x^2}e^{-xy^2}\,dy$，求 $F'(x)$.

4. 应用对参量的微分法，求下列积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,dx$ $(a^2+b^2\neq 0)$；

(2) $\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx$.

5. 应用积分号下的积分法，求下列积分：

(1) $\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$ $(b>a>0)$；

(2) $\int_0^1\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$ $(b>a>0)$.

6. 试求累次积分：

$$\int_0^1 dx\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy \quad 与 \quad \int_0^1 dy\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx,$$

并指出它们为什么与定理 19.6 的结果不符.

---

7. 研究函数 $F(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,dx$ 的连续性，其中 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上是正的连续函数.

8. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,A]$ 上连续. 证明

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]\,dt=f(x)-f(a) \quad (a<x<A).$$

9. 设

$$F(x,y)=\int_{\frac{x}{y}}^{xy}(x-yz)f(z)\,dz,$$

其中 $f(z)$ 为可微函数，求 $F_{xy}(x,y)$.

10. 设

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,\quad F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

其中 $0<k<1$（这两个积分称为**完全椭圆积分**）.

(1) 试求 $E(k)$ 与 $F(k)$ 的导数，并以 $E(k)$ 与 $F(k)$ 来表示它们；

(2) 证明 $E(k)$ 满足方程

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

1. $F(y)=\begin{cases}1, & y<0\\ 1-2y, & 0\le y\le 1\\ -1, & y>1\end{cases}$

2.

(1) $\lim\limits_{a\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\lim\limits_{a\to 0}\sqrt{x^2+a^2}\,dx=1$

(2) $\lim\limits_{a\to 0}\int_0^2 x^2\cos ax\,dx=\int_0^2\lim\limits_{a\to 0}x^2\cos ax\,dx=\frac{8}{3}$

3. $F'(x)=\int_x^{x^2}-y^2e^{-xy^2}\,dy-e^{-x^3}+2xe^{-x^5}$

4.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,dx=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$

(2) $\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx=\begin{cases}0, & |a|\le 1\\ 2\pi\ln|a|, & |a|>1\end{cases}$

5.

(1) $I=\arctan(1+b)-\arctan(1+a)$

(2) $I=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$

6. $I_1=\frac{\pi}{4}$, $I_2=-\frac{\pi}{4}$

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续

7. $F(y)$ 在 $y=0$ 处不连续，其余位置连续

8. 略

9. $F_{xy}(x,y)=(2x-3y^2)f(xy)+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)+x^2y(1-y^2)f'(xy)$

10.

(1) $E'(k)=\frac{1}{k}[E(k)-F(k)]$

$F'(k)=\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}$

(2) $E''(k)=-\frac{1}{k}F(k)$

代入即证

习 题 20.1

1. 计算下列第一型曲线积分：

(1) $\int_L (x+y)\,ds$，其中 L 是以 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$ 为顶点的三角形周界；

(2) $\int_L (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,ds$，其中 L 是以原点为中心、R 为半径的右半圆周；

(3) $\int_L xy\,ds$，其中 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限中的部分；

(4) $\int_L |y|\,ds$，其中 L 为单位圆周 $x^2+y^2=1$；

(5) $\int_L (x^2+y^2+z^2)\,ds$，其中 L 为螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的一段；

(6) $\int_L xyz\,ds$，其中 L 是曲线 $x=t, y=\frac{2}{3}\sqrt{2t^3}, z=\frac{1}{2}t^2$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的一段；

(7) $\int_L \sqrt{2y^2+z^2}\,ds$，其中 L 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x=y$ 相交的圆周.

2. 求曲线 $x=a, y=at, z=\frac{1}{2}at^2$ $(0\leqslant t\leqslant 1, a>0)$ 的质量，设其线密度为 $\rho=\sqrt{\frac{2z}{a}}$.

3. 求摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant \pi)$ 的质心，设其质量分布是均匀的.

---

4. 若曲线以极坐标 $\rho=\rho(\theta)$ $(\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2)$ 表示，试给出计算 $\int_L f(x,y)\,ds$ 的公式，并用此公式计算下列曲线积分：

(1) $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$，其中 L 为曲线 $\rho=a$ $\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$ 的一段；

(2) $\int_L x\,ds$，其中 L 为对数螺线 $\rho=ae^{k\theta}$ $(k>0)$ 在圆 $r=a$ 内的部分.

5. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在光滑曲线 $L: x=x(t), y=y(t), t\in[\alpha,\beta]$ 上连续，则存在点 $(x_0,y_0)\in L$，使得

$$\int_L f(x,y)\,ds = f(x_0,y_0)\Delta L,$$

其中 ΔL 为 L 的弧长.

1.

(1) $\int_L (x+y)\,ds = \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 \sqrt{2}\,dx + \int_0^1 y\,dy = \sqrt{2}+1$

(2) $x=R\cos\theta,\ y=R\sin\theta$

$\int_L (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R\,d\theta = \pi R^2$

(3) $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$\int_L xy\,ds = \int_0^a x\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx = \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$

(4) $x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$

$\int_L |y|\,ds = \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta - \int_\pi^{2\pi}\sin\theta\,d\theta = 4$

(5) $\int_L (x^2+y^2+z^2)\,ds = \int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \frac{2(3a^2+4b^2\pi^2)\sqrt{a^2+b^2}\,\pi}{3}$

(6) $\int_L xyz\,ds = \int_0^1 t\cdot\frac{2\sqrt{2t^3}}{3}\cdot\frac{1}{2}t^2\cdot\sqrt{1+2t+t^2}\,dt = \frac{16\sqrt{2}}{143}$

(7) $x=\frac{a}{\sqrt{2}}\sin t,\ y=\frac{a}{\sqrt{2}}\sin t,\ z=a\cos t$

$\int_L \sqrt{2y^2+z^2}\,ds = \int_0^{2\pi} a\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}\,dt = 2a^2\pi$

2. $m=\int_L \rho\,ds = \int_0^1 t\sqrt{a^2+a^2t^2}\,dt = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}a$

3. $\bar{x} = \frac{\int_L x\,ds}{\int_L ds} = \frac{\int_0^\pi 2a^2(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\,dt}{\int_0^\pi 2a\sin\frac{t}{2}\,dt} = \frac{4}{3}a$

同理 $\bar{y}=\frac{4}{3}a$

$M(\frac{4}{3}a, \frac{4}{3}a)$

4. $x=\rho(\theta)\cos\theta,\ y=\rho(\theta)\sin\theta,\ ds=\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2+(\frac{dy}{d\theta})^2}\,d\theta=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$

$\int_L f(x,y)\,ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$

(1) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{a^2+0}\,d\theta = \frac{a\pi}{4}e^a$

(2) $I=\int_{-\infty}^0 ae^{b\theta}\cos\theta\sqrt{a^2e^{2k\theta}+a^2k^2e^{2k\theta}}\,d\theta = \frac{4a^2k\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$

5. $\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$

由中值定理得，$\exists t_0\in[\alpha,\beta]$ s.t. $\int_L f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt = f[x(t_0),y(t_0)]\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt = f[x(t_0),y(t_0)](\Delta L)$

令 $x_0=x(t_0)$，$y_0=y(t_0)$，即证

习 题 20.2

1. 计算第二型曲线积分：

(1) $\int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$，其中 L 为本节例 2 中的三种情况；

(2) $\int_L (2a-y)\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$，其中 L 为摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 沿 t 增加方向的一段；

(3) $\oint_L \frac{-x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=1$，依逆时针方向；

(4) $\oint_L y\mathrm{d}x + \sin x\mathrm{d}y$，其中 L 为 $y=\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 与 x 轴所围的闭曲线，依顺时针方向；

(5) $\int_L x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$，其中 L 为从 $(1,1,1)$ 到 $(2,3,4)$ 的直线段.

2. 设质点受力作用，力的反方向指向原点，大小与质点离原点的距离成正比. 若质点由 $(a,0)$ 沿椭圆移动到 $(0,b)$，求力所做的功.

3. 设一质点受力作用，力的方向指向原点，大小与质点到 xy 平面的距离成反比. 若质点沿直线 $x=at, y=bt, z=ct$ $(c\neq 0)$ 从 $M(a,b,c)$ 移动到 $N(2a,2b,2c)$，求力所做的功.

4. 证明曲线积分的估计式

$$\left|\int_{\widehat{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y\right| \leqslant LM,$$

其中 L 为 $\widehat{AB}$ 的弧长，$M=\max\limits_{(x,y)\in\widehat{AB}}\sqrt{P^2+Q^2}$.

利用上述不等式估计积分

$$I_R = \int_{x^2+y^2=R^2} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2},$$

并证明 $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R = 0$.

5. 计算沿空间曲线的第二型曲线积分：

(1) $\int_L xyz\mathrm{d}z$，其中 L 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $y=z$ 相交的圆，其方向按曲线依次经过 1,2,7,8 卦限；

(2) $\int_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分的边界曲线，其方向按曲线依次经过 xy 平面部分，yz 平面部分和 zx 平面部分.

1. $\int_L x\,dy - y\,dx$

(1) (i) $\int_L x\,dy - y\,dx = \int_0^1 (x\cdot 4x - 2x^2)\,dx = \frac{2}{3}$

(ii) $\int_L x\,dy - y\,dx = \int_0^1 (x\cdot 2 - 2x)\,dx = 0$

(iii) $\int_{OA} x\,dy - y\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$

$\int_{AB} x\,dy - y\,dx = \int_0^2 (1-0)\,dy = 2$

$\int_{BO} x\,dy - y\,dx = 0$

$\int_L x\,dy - y\,dx = (\int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO})\, x\,dy - y\,dx = 2$

(2) $\int_L (2a-y)\,dx + dy = \int_0^{2\pi} \big([2a - a(1-\cos t)]\, a(1-\cos t) + a\sin t\big)\,dt = a^2\pi$

(3) $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$

$\oint_L \frac{-x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy = \int_0^{2\pi} \left[(-\frac{1}{a}\cos t)(-a\sin t) + (\frac{1}{a}\sin t)(a\cos t)\right] dt = 0$

(4) $A = (\pi, 0)$

$\int_{OA} y\,dx + \sin x\,dy = \int_0^{\pi} (\sin x + \sin x\cos x)\,dx = 2$

$\int_{AO} y\,dx + \sin x\,dy = 0$

$I = 2 + 0 = 2$

(5) $x = 1+t,\ y = 1+2t,\ z = 1+3t,\ 0\le t\le 1$

$\int_L x\,dx + y\,dy + z\,dz = \int_0^1 [(1+t) + 2(1+2t) + 3(1+3t)]\,dt = 13$

2. $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0\le t\le \frac{\pi}{2}$

$F = k\sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = (kx, ky)$

$W = \int_L kx\,dx + ky\,dy = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a^2\sin t\cos t + b^2\sin t\cos t)\,dt = \frac{1}{2}k(b^2-a^2)$

3. $1\le t\le 2$

$F = \frac{k}{z}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{k}{c\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t^2}(x, y, z)$

$W = \frac{k}{c\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \int_1^2 \frac{a^2+b^2+c^2}{t}\,dt = \frac{k\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c}\ln 2$

4. $\left|\int_{AB} P\,dx + Q\,dy\right| \le \int_{AB} |P\,dx + Q\,dy| = \int_{AB} |P\cos\langle\vec{t}, \vec{x}\rangle + Q\cos\langle\vec{t}, \vec{y}\rangle|\,ds \le \int_{AB} \sqrt{(P^2+Q^2)(\cos^2\langle\vec{t}, \vec{x}\rangle + \cos^2\langle\vec{t}, \vec{y}\rangle)}\,ds \le LM$

$\sqrt{P^2+Q^2} = \frac{R}{(R^2+xy)^2} \Rightarrow M = \frac{4}{R^3}$

$L = 2\pi R$

$I \le ML = \frac{8\pi}{R^2}$

$\lim\limits_{R\to+\infty} \frac{8\pi}{R^2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{R\to+\infty} I_R = 0$

5.

(1) $x = \cos\theta,\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta,\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta,\ 0\le\theta\le 2\pi$

$\int_L xyz\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{4}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{\sqrt{2}}{16}\pi$

(2) $I = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -4$

第二十章总练习题

1. 计算下列曲线积分：

(1) $\int_L y\,ds$，其中 L 是由 $y^2=x$ 和 $x+y=2$ 所围的闭曲线；

(2) $\int_L |y|\,ds$，其中 L 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$；

(3) $\int_L z\,ds$，其中 L 为圆锥螺线

$$x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t,\quad t\in[0,t_0]；$$

(4) $\int_L xy^2dy-x^2ydx$，L 为以 a 为半径，圆心在原点的右半圆周从最上面一点 A 到最下面一点 B；

(5) $\int_L \frac{dy-dx}{x-y}$，L 是抛物线 $y=x^2-4$，从 $A(0,-4)$ 到 $B(2,0)$ 的一段；

(6) $\int_L y^2dx+z^2dy+x^2dz$，L 是维维安尼曲线 $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2=ax\ (z\geq 0, a>0)$，若从 x 轴正向看去，L 是沿逆时针方向进行的.

2. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，试就如下曲线：

(1) L：连接 $A(a,a)$，$C(b,a)$ 的直线段 $(b>a)$；

(2) L：连接 $A(a,a)$，$C(b,a)$，$B(b,b)$ 三点的三角形（逆时针方向）$(b>a)$，

计算下列曲线积分：

$$\int_L f(x,y)\,ds,\quad \int_L f(x,y)\,dx,\quad \int_L f(x,y)\,dy.$$

3. 设 $f(x,y)$ 为定义在平面曲线弧段 $\widehat{AB}$ 上的非负连续函数，且在 $\widehat{AB}$ 上恒大于零.

(1) 试证明 $\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\,ds>0$；

(2) 试问在相同条件下，第二型曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\,dx>0$$

是否成立？为什么？

1.

(1) $L_1: x=t^2,\ y=t,\ ds=\sqrt{1+4t^2}\,dt,\ -2\leq t\leq 1$

$\int_{L_1} y\,ds=\int_{-2}^{1} t\sqrt{1+4t^2}\,dt=\frac{5\sqrt5-17\sqrt{17}}{12}$

$L_2: x=t,\ y=2-t,\ ds=\sqrt{2t^2-4t+4}\,dt,\ 1\leq t\leq 3$

$\int_{L_2} y\,ds=\int_{1}^{3}(2-t)\sqrt{2t^2-4t+4}\,dt=-\frac{3\sqrt2}{2}$

$\int_L y\,ds=\frac{5\sqrt5-17\sqrt{17}}{12}-\frac{3\sqrt2}{2}$

(2) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ r=a\sqrt{\cos 2\theta},\ ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta=\frac{a^2}{r^2}d\theta$

$\int_L |y|\,ds=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\sin\theta\,\frac{a^2}{r}\,d\theta=(4-2\sqrt2)a^2$

(3) $ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\sqrt{t^2+2}\,dt$

$\int_L z\,ds=\int_0^{t_0} t\sqrt{t^2+2}\,dt=\frac{(t_0+2)^{\frac32}-2\sqrt2}{3}$

(4) $x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta,\ -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

$\int_L xy^2dy-x^2ydx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\left[(a^3\cos\theta\sin^2\theta)(a\cos\theta)-(a^3\cos^2\theta\sin\theta)(-a\sin\theta)\right]d\theta=-\frac{a^4}{4}\pi$

(5) $\int_L\frac{dy-dx}{x-y}=\int_0^2\frac{2x-1}{x-x^2+4}\,dx=\int_0^2-\frac{1}{x-x^2+4}\,d(x-x^2+4)=\ln 2$

(6) $x=a\sin^2t,\ y=a\sin t\cos t,\ z=a\cos t$

$\int_L y^2dx+z^2dy+x^2dz=a^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}(2\sin^3t\cos^3t+\cos^4t-\sin^2t\cos^2t-\sin^5t)\,dt=-\frac{\pi}{4}a^3$

2.

(1) $y=a,\ a\leq x\leq b,\ ds=dx$

$\int_L f\,ds=\int_a^b f(x,a)\,dx$

$\int_L f\,dx=\int_a^b f(x,a)\,dx$

$\int_L f\,dy=0$

(2) $\int_{L_2} f\,ds=\int_a^b f(x,a)\,dx+\int_a^b f(b,y)\,dy+\int_a^b\sqrt2 f(t,t)\,dt$

$\int_{L_2} f\,dx=\int_a^b f(x,a)\,dx+\int_b^a f(t,t)\,dt$

$\int_{L_2} f\,dy=\int_a^b f(b,y)\,dy+\int_b^a f(t,t)\,dt$

3.

(1) $\exists(x_0,y_0)\in\widehat{AB}$ s.t. $\int_{AB} f(x,y)\,ds=f(x_0,y_0)\,\Delta L>0$

(2) 不一定. 令 $\widehat{AB}$ 为 $(0,0)\to(0,1)$ 的直线段，则 $\int_{AB} f(x,y)\,dx=0$.

习 题 21.1

1. 把重积分 $\iint\limits_D xy\,d\sigma$ 作为积分和的极限，计算这个积分值，其中 $D=[0,1]\times[0,1]$，并用直线网

$$x=\frac{i}{n},\ y=\frac{j}{n}\quad(i,j=1,2,\cdots,n-1)$$

分割这个正方形为许多小正方形，每个小正方形取其右上顶点作为其介点.

2. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积，则 $f(x,y)$ 在 D 上有界.

3. 证明二重积分中值定理（性质 7）.

4. 若 $f(x,y)$ 为有界闭区域 D 上的非负连续函数，且在 D 上不恒为零，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma>0.$$

5. 若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，且在 D 内任一子区域 $D'\subset D$ 上有

$$\iint\limits_{D'} f(x,y)\,d\sigma=0,$$

则在 D 上 $f(x,y)=0$.

6. 设 $D=[0,1]\times[0,1]$，证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\text{ 为 } D \text{ 内有理点（即 } x,y \text{ 皆为有理数），}\\ 0, & (x,y)\text{ 为 } D \text{ 内非有理点}\end{cases}$$

在 D 上不可积.

7. 证明：若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，$g(x,y)$ 在 D 上可积且不变号，则存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\,d\sigma=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\,d\sigma.$$

8. 应用中值定理估计积分

$$I=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\frac{d\sigma}{100+\cos^2x+\cos^2y}$$

的值.

1. $\iint\limits_D xy\,dxdy=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}=\frac{1}{4}$

2. 假设 f 在 D 上无界

则 $\forall I$，总能构造出 T 使得 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta\sigma_i\right|>|I|+1$

与 f 可积矛盾！

故 f 在 D 上有界

3. f 在 D 上连续 $\Rightarrow$ f 在 D 上存在最大值 M，最小值 m，且 $\forall P\in D$，$m\leqslant f(P)\leqslant M$

$\Rightarrow m(\Delta D)\leqslant\int\limits_D f\leqslant M(\Delta D)\Rightarrow m\leqslant\frac{1}{\Delta D}\iint\limits_D f\leqslant M$

故 $\exists(\xi,\eta)\in D$ s.t. $f(\xi,\eta)=\frac{1}{\Delta D}\int\limits_D f$，即 $\int\limits_D f=f(\xi,\eta)(\Delta D)$

4. 设 $(x_0,y_0)\in D$，$f(x_0,y_0)>0$

f 在 D 上连续 $\Rightarrow\exists\eta>0$ s.t. $\forall P\in D'=D\cap U(P_0;\eta)$，$f(P)>0=\iint\limits_{D'}f>0$

$\Rightarrow\iint\limits_D f=\iint\limits_{D'}f+\iint\limits_{D-D'}f>0$

5. 假设 $\exists P_0=(x_0,y_0)\in D$ s.t. $f(P_0)\neq0$，不妨设 $f(P_0)>0$

f 在 D 上连续 $\Rightarrow\exists\eta>0$ s.t. $\forall P\in D'=D\cap U(P_0;\eta)$，$f(P)>0$

则 $\iint\limits_{D'}f>0$，与题设矛盾！

故 $f(x,y)\equiv0$

6. 取无理点：$\lim\limits_{T\to0}\sum\limits_T f(P)\Delta\sigma=0$

取有理点：$\lim\limits_{T\to0}\sum\limits_T f(P)\Delta\sigma=1$

故不可积

7. 不妨设 $g(x,y)\geqslant0$

f 在 D 上连续 $\Rightarrow$ 设 f 在 D 上的最小值为 m，最大值为 M

则 $m\iint\limits_D g(x,y)\,dxdy\leqslant\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\,dxdy\leqslant M\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy\Rightarrow m\leqslant\frac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\,dxdy}{\iint\limits_D g(x,y)\,dxdy}\leqslant M$

f 在 D 上连续 $\Rightarrow\exists(\xi,\eta)\in D$ s.t. $f(\xi,\eta)=\frac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\,dxdy}{\iint\limits_D g(x,y)\,dxdy}$

即证

8. 由中值定理得，$\exists(\xi,\eta)\in D$ s.t. $I=\frac{\Delta D}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta}\Rightarrow I\in[\frac{100}{51},2]$

习 题 21.2

1. 设 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，试将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 化为不同顺序的累次积分：

(1) D 是由不等式 $y\leqslant x, y\geqslant a, x\leqslant b\ (0<a<b)$ 所确定的区域；

(2) D 是由不等式 $y\leqslant x, y\geqslant 0, x^2+y^2\leqslant 1$ 所确定的区域；

(3) D 是由不等式 $x^2+y^2\leqslant 1$ 与 $x+y\geqslant 1$ 所确定的区域；

(4) $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$.

2. 在下列积分中改变累次积分的顺序：

(1) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{2x}f(x,y)\mathrm{d}y$；　　(2) $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y$；

(3) $\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\mathrm{d}y$；　　(4) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^3\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)}f(x,y)\mathrm{d}y$.

3. 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由抛物线 $y^2=2px$ 与直线 $x=\frac{p}{2}\ (p>0)$ 所围成的区域；

(2) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, \sqrt{x}\leqslant y\leqslant 2\sqrt{x}\}$；

(3) $\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{2a-x}}\ (a>0)$，其中 D 为图 21-10 中阴影部分；

(4) $\iint\limits_D \sqrt{x}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x\}$.

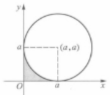

图 21-10

4. 求由坐标平面及 $x=2, y=3, x+y+z=4$ 所围的角柱体的体积.

---

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x,$$

其中等号仅在 $f(x)$ 为常量函数时成立.

6. 设平面区域 D 在 x 轴和 y 轴的投影长度分别为 l_x 和 l_y，D 的面积为 S_D，(α,β) 为 D 内任一点，证明：

(1) $\left|\iint\limits_D (x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant l_x l_y S_D$；

(2) $\left|\iint\limits_D (x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant \frac{1}{4}l_x^2 l_y^2$.

7. 设 $D=[0,1]\times[0,1]$，

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{q_x}+\frac{1}{q_y}, & \text{当}(x,y)\text{为} D \text{中有理点，}\\ 0, & \text{当}(x,y)\text{为} D \text{中非有理点，}\end{cases}$$

其中 q_x 表示有理数 x 化成既约分数后的分母. 证明 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分存在而两个累次积分不存在.

8. 设 $D=[0,1]\times[0,1]$，

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当}(x,y)\text{为} D \text{中有理点，且} q_x=q_y \text{时，}\\ 0, & \text{当}(x,y)\text{为} D \text{中其他点时，}\end{cases}$$

其中 q_x 意义同第 7 题. 证明 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分不存在而两个累次积分存在.

1.

(1) $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)\,dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)\,dx$

(2) $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^x f(x,y)\,dy+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dy=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dx$

(3) $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dx$

(4) $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int_{-1}^0 dx\int_{-x-1}^{x+1}f(x,y)\,dy+\int_0^1 dx\int_{x-1}^{-x+1}f(x,y)\,dy=\int_{-1}^0 dy\int_{-y-1}^{y+1}f(x,y)\,dx+\int_0^1 dy\int_{y-1}^{-y+1}f(x,y)\,dx$

2.

(1) $\int_0^2 dx\int_x^{2x}f(x,y)\,dy=\int_0^2 dy\int_{\frac{1}{2}y}^{y}f(x,y)\,dx+\int_2^4 dy\int_{\frac{1}{2}y}^{2}f(x,y)\,dx$

(2) $\int_{-1}^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)\,dy=\int_{-1}^0 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dx+\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)\,dx$

(3) $\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\,dy=\int_0^a dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\,dx+\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)\,dx+\int_a^{2a}dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)\,dx$

(4) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2}f(x,y)\,dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)}f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y}f(x,y)\,dx$

3.

(1) $\iint\limits_D xy^2\,d\sigma=\int_{-p}^{p}dy\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}xy^2\,dx=\frac{p^2}{21}$

(2) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,d\sigma=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(x^2+y^2)\,dy=\frac{128}{105}$

(3) $\iint\limits_D \frac{d\sigma}{\sqrt{2a-x}}=\int_0^a dx\int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{2a-x}}=(2\sqrt{2}-\frac{8}{3})a^{\frac{3}{2}}$

(4) $\iint\limits_D \sqrt{x}\,d\sigma=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}\sqrt{x}\,dy=\frac{8}{15}$

4. $V=\iint\limits_D (4-x-y)\,dxdy=\int_0^2 dy\int_0^2(4-x-y)\,dx+\int_2^3 dy\int_0^{4-y}(4-x-y)\,dx=\frac{55}{6}$

5. $[\int_a^b f(x)dx]^2=\int_a^b f(x)dx\int_a^b f(y)dy=\iint\limits_D f(x)f(y)dxdy\leqslant\iint\limits_D\frac{1}{2}[f^2(x)+f^2(y)]dxdy=\int_a^b dy\int_a^b f^2(x)dx=(b-a)\int_a^b f^2(x)dx$

6.

(1) $\left|\iint\limits_D (x-\alpha)(y-\beta)dxdy\right|\leqslant\iint\limits_D|x-\alpha||y-\beta|dxdy\leqslant l_x l_y\iint\limits_D dxdy=l_x l_y S_D$

(2) 令 $\frac{x-a}{l_x}=t$，设 $\rho=\frac{1}{l_x}(\alpha-a)$

$|x-\alpha|=|x-a+a-\alpha|=|l_x t-l_x\rho|=l_x|t-\rho|$

$\int_a^b|x-\alpha|dx=l_x\int_a^b|t-\rho|dx=l_x^2\int_0^1|t-\rho|dt=l_x^2[\frac{1}{2}-\rho(1-\rho)]\leqslant\frac{1}{2}l_x^2$

同理 $\int_a^b|y-\beta|dy\leqslant\frac{1}{2}l_y^2$

$\Rightarrow\left|\iint\limits_D(x-\alpha)(y-\beta)dxdy\right|\leqslant\frac{1}{4}l_x^2 l_y^2$

7. $f(x,y)$ 在 $x\in[0,1]$ 上关于 x 的积分不存在 $\Rightarrow$ 先对 x 后对 y 的累次积分不存在

同理 先对 y 后对 x 的累次积分不存在

8. $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx=0$

习 题 21.3

1. 应用格林公式计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L (x+y)^2 dx - (x^2+y^2) dy$，其中 L 是以 $A(1,1)$，$B(3,2)$，$C(2,5)$ 为顶点的三角形，方向取正向；

(2) $\int_{AB} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$，其中 m 为常数，AB 为由 $(a,0)$ 到 $(0,0)$ 经过圆 $x^2+y^2=ax$ 上半部的路线 $(a>0)$.

2. 应用格林公式计算下列曲线所围的平面面积：

(1) **星形线**：$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$；

(2) **双纽线**：$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

3. 证明：若 L 为平面上封闭曲线，$\boldsymbol{l}$ 为任意方向向量，则

$$\oint_L \cos(\widehat{\boldsymbol{l},\boldsymbol{n}}) ds = 0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲线 L 的外法线方向.

4. 求积分值 $I=\oint_L [x\cos(\widehat{\boldsymbol{n},x}) + y\cos(\widehat{\boldsymbol{n},y})] ds$，其中 L 为包围有界区域的封闭曲线，$\boldsymbol{n}$ 为 L 的外法线方向.

5. 验证下列积分与路线无关，并求它们的值：

(1) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy)$；

(2) $\int_{(0,0)}^{(x,y)} (2x\cos y - y^2\sin x) dx + (2y\cos x - x^2\sin y) dy$；

(3) $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y dx - x dy}{x^2}$，沿在右半平面的路线；

(4) $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$，沿不通过原点的路线；

(5) $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy$，其中 $\varphi(x)$，$\psi(y)$ 为连续函数.

6. 求下列全微分的原函数：

(1) $(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$；

(2) $e^x[e^y(x-y+2)+y]dx+e^x[e^y(x-y)+1]dy$；

(3) $f(\sqrt{x^2+y^2})xdx+f(\sqrt{x^2+y^2})ydy$.

7. 为了使曲线积分

$$\int_L F(x,y)(y dx + x dy)$$

与积分路线无关，可微函数 $F(x,y)$ 应满足怎样的条件？

8. 计算曲线积分

$$\int_{\widehat{AMB}} [\varphi(y)e^x - my] dx + [\varphi'(y)e^x - m] dy,$$

其中 $\varphi(y)$ 和 $\varphi'(y)$ 为连续函数，$\widehat{AMB}$ 为连接点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$ 的任何路线，但与直线段 AB 围成已知大小为 S 的面积.

9. 设函数 $f(u)$ 具有一阶连续导数，证明对任何光滑封闭曲线 L，有

$$\oint_L f(xy)(y dx + x dy) = 0.$$

10. 设函数 $u(x,y)$ 在由封闭的光滑曲线 L 所围的区域 D 上具有二阶连续偏导数，证明

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) d\sigma = \oint_L \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} ds,$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 是 $u(x,y)$ 沿 L 外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

1.

(1) $\oint_L (x+y)^2 dx - (x^2+y^2) dy = \iint_D (-2x-2x-2y) d\sigma = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{4x-3} (-4x-2y) dy + \int_2^3 dx \int_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{-3x+11} (-4x-2y) dy = -\frac{140}{3}$

(2) $\int_{AB} Pdx+Qdy = \oint_L Pdx+Qdy - \int_{BA} Pdx+Qdy$

$\oint_L Pdx+Qdy = \iint_D (e^x\cos y - e^x\cos y + m) d\sigma = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} m\, dy = \frac{1}{8} m a^2 \pi$

$\int_{BA} Pdx+Qdy = 0$

$\Rightarrow \int_{AB} Pdx+Qdy = \frac{1}{8} m a^2 \pi$

2.

(1) $S = \frac{1}{2}\oint_L x dy - y dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3a^2 \sin^2 t \cos^2 t\, dt = \frac{3}{8}a^2\pi$

(2) $r^2 = a^2\cos(2\theta)$

$S = \frac{1}{2}\oint_L x dy - y dx = a^2$

3. $\oint_L \cos\langle \vec{l}, \vec{n}\rangle ds = \oint_L dy = \iint_D 0 \cdot dx dy = 0$

4. $I = \oint_L x dy - y dx = \iint_D 2 dx dy = 2\sigma$

5.

(1) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$

$x=t,\ y=t,\ 0\le t\le 1$

$I = \int_0^1 0\, dt = 0$

(2) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x\sin y - 2y\sin x$

$I = \int_0^x 2s\, ds + \int_0^y (2t\cos s - s^2 \sin t) dt = y^2\cos x + x^2\cos y$

(3) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$

$y = 3-x,\ 1\le x\le 2$

$I = \int_2^1 \frac{3-x+x}{x^2} dx = -\frac{3}{2}$

(4) $\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = d\sqrt{x^2+y^2}$

$I = \int_{(1,0)}^{(6,8)} d\sqrt{x^2+y^2} = 9$

(5) $\varphi(x) dx + \psi(y) dy = d(F(x)+G(y))$

$I = \int_{(2,1)}^{(1,2)} d(F(x)+G(y)) = F(1)+G(2)-F(2)-G(1) = \int_2^1 \varphi(x) dx + \int_1^2 \psi(y) dy$

6.

(1) $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$u(x,y) = \int_0^x s^2 ds + \int_0^y (x^2 - 2xt - t^2) dt = \frac{1}{3}x^3 + x^2y - x^2y - \frac{1}{3}y^3 + C$$

(2) $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$u(x,y) = \int_0^x e^s(s+2)\, ds + \int_0^y e^x[e^t(x-t)+1]\, dt = e^x[e^y(x-y+1)+y] + C$$

(3) $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$du = \frac{1}{2} f(\sqrt{x^2+y^2})\, d(x^2+y^2)$$

$$u(x,y) = \int \frac{1}{2} f(\sqrt{x^2+y^2})\, d(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\int f(\sqrt{v})\, dv$$

7. $\frac{\partial F(x,y)x}{\partial y} = xF_y(x,y)$, $\frac{\partial F(x,y)y}{\partial x} = yF_x(x,y)$

$$xF_y(x,y) = yF_x(x,y)$$

8. $I = \oint_L Pdx + Qdy + \int_{AB} Pdx + Qdy$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma + \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} Pdx + Qdy$$

$$= ms + \varphi(y_2)e^{x_2} - \varphi(y_1)e^{x_1} - m(y_2 - y_1) - \frac{m}{2}(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)$$

9. $\oint_L f(xy)y\, dx + f(xy)x\, dy = \iint_D [f(xy) + xyf'(xy) - f(xy) - xyf'(xy)]\, d\sigma = \iint_D 0\, d\sigma = 0$

10. $\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_L -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) d\sigma$

习 题 21.4

1. 对积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 进行极坐标变换并写出变换后不同顺序的累次积分：

(1) 当 D 为由不等式 $a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant b^2, y \geqslant 0$ 所确定的区域；

(2) $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant y, x \geqslant 0\}$；

(3) $D=\{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant x+y \leqslant 1\}$.

2. 用极坐标计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y) \mid \pi^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\pi^2\}$；

(2) $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant x+y\}$；

(3) $\iint\limits_D |xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为圆域 $x^2+y^2 \leqslant a^2$；

(4) $\iint\limits_D f'(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为圆域 $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

3. 在下列积分中引入新变量 u,v 后，试将它化为累次积分：

(1) $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{1-x}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$，若 $u=x+y, v=x-y$；

(2) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y) \mid \sqrt{x}+\sqrt{y} \leqslant \sqrt{a}, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$，若 $x=u\cos^4 v, y=u\sin^4 v$；

(3) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y) \mid x+y \leqslant a, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$，若 $x+y=u, y=uv$.

4. 试作适当变换，计算下列积分：

(1) $\iint\limits_D (x+y)\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D=\{(x,y) \mid 0 \leqslant x+y \leqslant \pi, 0 \leqslant x-y \leqslant \pi\}$；

(2) $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D=\{(x,y) \mid x+y \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

5. 求由下列曲面所围立体 V 的体积：

(1) V 是由 $z=x^2+y^2$ 和 $z=x+y$ 所围的立体；

(2) V 是由曲面 $z^2=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ 和 $2z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ 所围的立体.

6. 求由下列曲线所围的平面图形面积：

(1) $x+y=a, x+y=b, y=\alpha x, y=\beta x\ (0<a<b, 0<\alpha<\beta)$；

(2) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=x^2+y^2$；

(3) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)\quad(x^2+y^2 \geqslant a^2)$.

---

7. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，且 $f(x,y)=f(y,x)$. 证明

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(1-x,1-y)\mathrm{d}y.$$

8. 试作适当变换，把下列二重积分化为单重积分：

(1) $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为圆域 $x^2+y^2 \leqslant 1$；

(2) $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y) \mid |y| \leqslant |x|, |x| \leqslant 1\}$；

(3) $\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y) \mid |x|+|y| \leqslant 1\}$；

(4) $\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y) \mid x \leqslant y \leqslant 4x, 1 \leqslant xy \leqslant 2\}$.

1.

(1) $I=\int_0^{\pi}d\theta\int_a^b rf(r\sin\theta, r\cos\theta)\,dr=\int_a^b dr\int_0^{\pi} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta$

(2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin\theta} rf(r\sin\theta, r\cos\theta)\,dr=\int_0^1 dr\int_{\arcsin r}^{\frac{\pi}{2}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta$

(3) $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}d\theta\int_0^{\sec\theta} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr$

2.

(1) $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\pi}^{2\pi} r\sin r\,dr=-6\pi^2$

(2) $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{\cos\theta+\sin\theta} r^2(\sin\theta+\cos\theta)\,dr=\frac{\pi}{2}$

(3) $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a |r^3\sin\theta\cos\theta|\,dr=\frac{1}{2}a^4$

(4) $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R rf'(r^2)\,dr=\pi[f(R^2)-f(0)]$

3.

(1) $x=\frac{u+v}{2},\ y=\frac{u-v}{2}$，$D=\{(u,v) \mid 1\le u\le 2,\ -u\le v\le 4-u\}$，$|J|=\frac{1}{2}$

$I=\iint\limits_D f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})\cdot\frac{1}{2}dudv=\frac{1}{2}\int_1^2 du\int_{-u}^{4-u} f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})\,dv$

(2) $D=\{(u,v) \mid 0\le u\le a,\ 0\le v\le \frac{\pi}{2}\}$，$|J|=4u\sin^3 v\cos^3 v$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dv\int_0^a 4u\sin^3 v\cos^3 v\, f(u\sin^4 v, u\cos^4 v)\,du=\int_0^a du\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4u\sin^3 v\cos^3 v\, f(u\sin^4 v, u\cos^4 v)\,dv$

(3) $x=u-uv,\ y=uv$，$D=\{(u,v) \mid 0\le u\le a,\ 0\le v\le 1\}$，$|J|=u$

$I=\int_0^1 dv\int_0^a uf(u-uv, uv)\,du=\int_0^a du\int_0^1 uf(u-uv, uv)\,dv$

4.

(1) $x=\frac{u+v}{2},\ y=\frac{u-v}{2}$，$D=\{(x,y) \mid 0\le u\le\pi,\ 0\le v\le\pi\}$，$|J|=\frac{1}{2}$

$I=\int_0^{\pi}dv\int_0^{\pi}\frac{1}{2}u\sin v\,du=\frac{1}{2}\pi^2$

(2) $x=u-v,\ y=u$，$D=\{(u,v) \mid 0\le u\le v,\ 0\le v\le 1\}$，$|J|=1$

$I=\int_0^1 dv\int_0^v e^{\frac{u}{v}}\,du=\frac{e-1}{2}$

5.

(1) $z=x^2+y^2=x+y \Rightarrow D=\{(x,y) \mid (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{2}\}$

$x=\frac{1}{2}+r\cos\theta,\ y=\frac{1}{2}+r\sin\theta$，$D=\{(r,\theta) \mid 0\le r\le\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\le\theta\le 2\pi\}$，$|J|=r$

$V=\iint\limits_D[(x+y)-(x^2+y^2)]dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\frac{1}{2}-r^2)r\,dr=\frac{\pi}{8}$

(2) $z^2=2z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \Rightarrow D=\{(x,y) \mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 4\}$

$x=2r\cos\theta,\ y=3r\sin\theta$，$D=\{(r,\theta) \mid 0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$，$|J|=6r$

$$V=\iint_D\left[\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)\right]dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\left(r-\frac{r^2}{2}\right)\cdot 6rdr=8\pi$$

6.

(1) $x=\frac{u}{1+v},\ y=\frac{uv}{1+v},\ D=\{(u,v)\mid a\le u\le b,\ \alpha\le v\le\beta\},\ |J|=\frac{u}{(1+v)^2}$

$$S=\iint_D dxdy=\int_a^b du\int_\alpha^\beta\frac{u}{(1+v)^2}dv=\frac{b^2-a^2}{2}\left(\frac{1}{1+\alpha}-\frac{1}{1+\beta}\right)$$

(2) $x=ar\cos\theta,\ y=br\sin\theta,\ D=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta},\ 0\le\theta\le 2\pi\},\ |J|=r$

$$S=\iint_D dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}rdr=\frac{ab(a^2+b^2)}{2}\pi$$

(3) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ D'=\{(r,\theta)\mid a\le r\le a\sqrt{2\cos 2\theta},\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{6}\},\ |J|=r$

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta\int_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}}rdr=\left(3-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)a^2$$

7. $x=1-u,\ y=1-v,\ D=\{(u,v)\mid 0\le u\le 1,\ 0\le v\le u\},\ |J|=1$

$$I=\int_0^1du\int_0^u f(1-u,1-v)dv=\int_0^1du\int_0^u f(1-v,1-u)dv=\int_0^1dx\int_0^x f(1-x,1-y)dy$$

8.

(1) $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 f(r)rdr=2\pi\int_0^1 f(r)rdr$

(2) $I=\pi\int_0^{\sqrt{2}}f(r)dr-4\int_1^{\sqrt{2}}r\arccos\frac{1}{r}f(r)dr$

(3) $x=\frac{u+v}{2},\ y=\frac{u-v}{2},\ D=\{(u,v)\mid -1\le u\le 1,\ -1\le v\le 1\},\ |J|=\frac{1}{2}$

$$I=\frac{1}{2}\int_{-1}^1du\int_{-1}^1 f(u)dv=\int_{-1}^1 f(u)du$$

(4) $x=\sqrt{\frac{u}{v}},\ y=\sqrt{uv},\ D=\{(u,v)\mid 1\le u\le 2,\ 1\le v\le 4\},\ |J|=\frac{1}{2v}$

$$I=\frac{1}{2}\int_1^2du\int_1^4 f(u)\frac{1}{v}dv=\ln 2\int_1^2 f(u)du$$

习 题 21.5

1. 计算下列积分：

(1) $\iiint\limits_V (xy+z^2)\,dxdydz$，其中 $V=[-2,5]\times[-3,3]\times[0,1]$；

(2) $\iiint\limits_V x\cos y\cos z\,dxdydz$，其中 $V=[0,1]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$；

(3) $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，其中 V 是由 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成的区域；

(4) $\iiint\limits_V y\cos(x+z)\,dxdydz$，其中 V 是由 $y=\sqrt{x}$，$y=0$，$z=0$ 及 $x+z=\frac{\pi}{2}$ 所围成的区域.

2. 试改变下列累次积分的顺序：

(1) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz$；

(2) $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz$.

3. 计算下列三重积分与累次积分：

(1) $\iiint\limits_V z^2\,dxdydz$，其中 V 由 $x^2+y^2+z^2\leqslant r^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2rz$ 所确定；

(2) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,dz$.

4. 利用适当的坐标变换，计算下列各曲面所围成的体积：

(1) $z=x^2+y^2$，$z=2(x^2+y^2)$，$y=x$，$y=x^2$；

(2) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ $(x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0,a>0,b>0,c>0)$.

5. 设球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2x$ 上各点的密度等于该点到坐标原点的距离，求该球体的质量.

---

6. 证明定理 21.16 及其推论.

7. 设 $V=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant1\right\}$，计算下列积分：

(1) $\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz$；

(2) $\iiint\limits_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}\,dxdydz$.

1.

(1) $\iiint\limits_V (xy+z^2)\,dxdydz=\int_{-2}^{5}dx\int_{-3}^{3}dy\int_0^1(xy+z^2)\,dz=14$

(2) $\iiint\limits_V x\cos y\cos z\,dxdydz=\int_0^1 x\,dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos y\,dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos z\,dz=\frac{1}{2}$

(3) $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}=\frac{1}{2}\ln2-\frac{5}{16}$

(4) $\iiint\limits_V y\cos(x+z)\,dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sqrt{x}}y\,dy\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+z)\,dz=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$

2.

(1) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)\,dz=\int_0^1 dx\int_0^{x}dz\int_0^{1-x}f(x,y,z)\,dy+\int_0^1 dx\int_x^1 dz\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)\,dy=\int_0^1 dz\int_0^{z}dx\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)\,dy+\int_0^1 dz\int_z^1 dx\int_0^{1-x}f(x,y,z)\,dy$

(2) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2\,dz=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\,dz=\int_0^1 dy\int_0^1 dx\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\,dz$

3.

(1) $\iiint\limits_V z^2\,dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dz\iint\limits_S z^2\,dxdy+\int_{\frac{r}{2}}^{r}dz\iint\limits_Q z^2\,dxdy=\pi\int_0^{\frac{r}{2}}z^2(2rz-z^2)\,dz+\pi\int_{\frac{r}{2}}^{r}z^2(r^2-z^2)\,dz=\frac{59}{480}\pi r^5$

(2) 应用柱面坐标变换 $V'=\{(r,\theta,z)\mid 0\le r\le1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ r\le z\le\sqrt{2-r^2}\}$

$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2\,dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\,dr\int_r^{\sqrt{2-r^2}}z^2\,dz=\frac{(2\sqrt{2}-1)\pi}{15}$

4.

(1) $V=\iint\limits_D(x^2+y^2)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)\,dy=\frac{3}{35}$

(2) 令 $x=ar\sin^2\varphi\cos\theta$, $y=br\cos^2\varphi\cos\theta$, $z=cr\sin\theta$

则 $J(r,\varphi,\theta)=2abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta$, $\Omega'=\{(r,\theta,\varphi)\mid 0\le r\le1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\}$

$V=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\iiint\limits_{\Omega'}2abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 2abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta\,dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\varphi\,d\varphi\int_0^1 abcr^2\,dr=\frac{1}{3}abc$

5. $M=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le2x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$

应用球坐标变换 $V'=\{(r,\theta,\varphi)\mid -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le r\le2\sin\varphi\cos\theta\}$

$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\sin\varphi\cos\theta}r^3\sin\varphi\,dr=\frac{5\pi}{8}$

6. 略

7.

(1) 应用球坐标变换

$\iiint\limits_V\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz=\iiint\limits_V\sqrt{1-r^2}\,r^2abc\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r^2abc\,dr=\frac{1}{4}abc\pi^2$

(2) 应用球坐标变换

$\iiint\limits_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}\,dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 abcr^2\sin\varphi\,e^r\,dr=4abc\pi\int_0^1 r^2e^r\,dr=4abc(e-2)$

习 题 21.6

1. 求曲面 $az=xy$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 内那部分的面积.

2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所截部分的曲面面积.

3. 求下列均匀密度的平面薄板质心:

(1) 半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1, y\geqslant 0$;

(2) 高为 h,底分别为 a 和 b 的等腰梯形.

(注:以梯形长为 a 的底边的中点为原点,该底所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系,并使梯形位于 x 轴上方.)

4. 求下列均匀密度物体的质心:

(1) $z\leqslant 1-x^2-y^2, z\geqslant 0$;

(2) 由坐标面及平面 $x+2y-z=1$ 所围的四面体.

5. 求下列均匀密度的平面薄板的转动惯量:

(1) 半径为 R 的圆关于其切线的转动惯量;

(2) 边长为 a 和 b、夹角为 φ 的平行四边形,关于底边 b 的转动惯量.

6. 计算下列引力:

(1) 均匀薄片 $x^2+y^2\leqslant R^2, z=0$ 对于轴上一点 $(0,0,c)$ $(c>0)$ 处的单位质量的引力;

(2) 均匀柱体 $x^2+y^2\leqslant a^2, 0\leqslant z\leqslant h$ 对于点 $P(0,0,c)$ $(c>h)$ 处的单位质量的引力;

(3) 均匀密度的正圆锥体(高为 h,底面半径为 R)对于在它的顶点处质量为 m 的质点的引力.

(注:以圆锥底面圆心为原点,底面所在平面为 xy 平面建立空间直角坐标系,圆锥顶点在 $(0,0,h)$.)

---

7. 求曲面

$$\begin{cases} x = (b+a\cos\psi)\cos\varphi, \\ y = (b+a\cos\psi)\sin\varphi, \\ z = a\sin\psi, \end{cases} \qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant\psi\leqslant 2\pi$$

的面积,其中常数 a,b 满足 $0\leqslant a\leqslant b$.

8. 求螺旋面

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = b\varphi, \end{cases} \qquad 0\leqslant r\leqslant a, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$$

的面积.

9. 求边长为 a、密度均匀的立方体关于其任一棱边的转动惯量.

1. $S=\iint\limits_D \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1+(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{a})^2}\,dxdy$

$x=ar\cos\theta,\ y=ar\sin\theta,\ D=\{(r,\theta)\mid 0\leq r\leq 1, 0\leq\theta\leq 2\pi\}$

$S=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 a^2 r\sqrt{1+r^2}\,dr = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}a^2\pi$

2. $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 2x\}$

$S=\iint\limits_D\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dxdy = \sqrt{2}\iint\limits_D dxdy=\sqrt{2}\pi$

3.

(1) $\bar{x}=0$

$\bar{y}=\frac{\iint\limits_D \mu y\,dxdy}{\iint\limits_D \mu\,dxdy} = \frac{2}{ab\pi}\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 ab^2r^2\sin\theta\,dr = \frac{4b}{3\pi}$

$M(0,\frac{4b}{3\pi})$

(2) $\bar{x}=0$

$\bar{y}=\frac{\iint\limits_D \mu y\,dxdy}{\iint\limits_D \mu\,dxdy} = \frac{2}{(a+b)h}\int_0^h y\,dy\int_{\frac{2h}{b-a}(x+\frac{a}{2})+h}^{\frac{2h}{a-b}(x-\frac{a}{2})+h}dx = \frac{2a+b}{3(a+b)}h$

$M(0,\frac{2a+b}{3(a+b)}h)$

4.

(1) $\bar{x}=0,\ \bar{y}=0$

$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_V \mu z\,dxdydz}{\iiint\limits_V \mu\,dxdydz} = \frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\,dr\int_0^{1-r^2}z\,dz}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\,dr\int_0^{1-r^2}dz} = \frac{1}{3}$

(2) $V=\iiint\limits_V dxdydz=\frac{1}{12}$

$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint\limits_V x\,dxdydz=\frac{1}{V}\int_0^1 x\,dx\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x}y\,dy\int_{x+2y-1}^0 dz=\frac{1}{4}$

同理 $\bar{y}=\frac{1}{8},\ \bar{z}=-\frac{1}{4}$

$M(\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{4})$

5.

(1) $J=\mu_0\iint\limits_D(R-x)^2dxdy=\mu_0\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r(R^2-2Rr\cos\theta+r^2\cos\theta)\,dr=\frac{5}{4}\mu_0\pi R^4$

(2) $J=\mu_0\iint\limits_D y^2dxdy=\mu_0\int_0^{a\sin\varphi}y^2dy\int_{y\cot\varphi}^{b+y\cot\varphi}dx=\frac{1}{3}\mu_0 a^3b\sin^3\varphi$

6.

(1) $F_x=0,\ F_y=0$

$F_z=k\mu\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2}\frac{c}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy=k\mu c\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\frac{r}{(r^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}dr=2k\mu\pi[1-\frac{c}{\sqrt{R^2+c^2}}]$

(2) $F_x=F_y=0$

$F_z=k\mu\iiint\limits_V\frac{z-c}{[x^2+y^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}dxdydz=k\mu\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r\,dr\int_0^h\frac{z-c}{[r^2+(z-c)^2]^3}dz=2k\mu\pi[\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+(h-c)^2}-h]$

(3) 略

7. $E=x_\varphi^2+y_\varphi^2+z_\varphi^2=(a\cos\psi+b)^2$

$F=x_\varphi x_\psi+y_\varphi y_\psi+z_\varphi z_\psi=0$

$$G = x_\psi^2 + y_\psi^2 + z_\psi^2 = a^2$$

$$S = \iint_S \sqrt{EG-F}\, d\varphi\, d\psi = a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} (a\cos\psi + b)\, d\psi = 4ab\pi^2$$

8. $E = x_r^2 + y_r^2 + z_r^2 = 1$

$$F = x_r x_\theta + y_r y_\theta + z_r z_\theta = 0$$

$$G = x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2 = r^2 + b^2$$

$$S = \iint_S \sqrt{EG-F}\, dr\, d\theta = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2+b^2}\, d\theta = \pi\left[a\sqrt{a^2+b^2} + b^2 \ln \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right]$$

9. $J = \mu \iiint_V (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz = \mu \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x^2+y^2)\, dz = \frac{2}{3}\mu a^5$

习 题 22.1

1. 计算下列第一型曲面积分：

(1) $\iint\limits_S (x+y+z)\,\mathrm{d}S$，其中 S 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, z\geqslant 0$；

(2) $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$，其中 S 为立体 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$ 的边界曲面；

(3) $\iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2}$，其中 S 为柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被平面 $z=0, z=H$ 所截取的部分；

(4) $\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}S$，其中 S 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限中的部分.

2. 求均匀曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的质心.

3. 求密度为 ρ 的均匀球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geqslant 0)$ 对于 z 轴的转动惯量.

---

4. 计算 $\iint\limits_S z^2\,\mathrm{d}S$，其中 S 为圆锥表面的一部分

$$S:\begin{cases} x=r\cos\varphi\sin\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\theta, \end{cases}\qquad D:\begin{cases} 0\leqslant r\leqslant a, \\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, \end{cases}$$

这里 θ 为常数 $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$.

1.

(1) $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $z_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, $z_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$I=\iint\limits_D (x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dy=\pi a^3$

(2) $z_1=\sqrt{x^2+y^2}$, $z_{1x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z_{1y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$I_1=\iint\limits_D (x^2+y^2)\cdot\sqrt{2}\,dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot r\,dr=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

$z_2=1$, $z_{2x}=0$, $z_{2y}=0$

$I_2=\iint\limits_D (x^2+y^2)\cdot 1\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot r\,dr=\frac{1}{2}\pi$

$I=I_1+I_2=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\pi$

(3) $I=\frac{1}{R^2}\iint\limits_S dS=\frac{1}{R^2}\cdot 2\pi RH=\frac{2\pi H}{R}$

(4) $z=1-x-y$, $z_x=-1$, $z_y=-1$

$I=\iint\limits_D xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}\,dxdy=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}xy(1-x-y)\,dy=\frac{\sqrt{3}}{120}$

2. $(0,0,0)$

3. $I=\frac{2}{3}ma^2$

4. $E=x_r^2+y_r^2+z_r^2=1$, $F=x_r x_\varphi+y_r y_\varphi+z_r z_\varphi=0$, $G=x_\varphi^2+y_\varphi^2+z_\varphi^2=r^2\sin^2\theta$

$\iint\limits_S z^2\,dS=\iint\limits_D r^2\cos^2\theta\cdot r\sin\theta\,drd\varphi=\sin\theta\cos^2\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^3\,dr=\frac{1}{2}a^4\pi\sin\theta\cos^2\theta$

习 题 22.2

1. 计算下列第二型曲面积分：

(1) $\iint\limits_S y(x-z)\,dydz + x^2\,dzdx + (y^2+xz)\,dxdy$，其中 S 为由 $x=y=z=0$，$x=y=z=a$ 六个平面所围的立方体表面并取外侧为正向；

(2) $\iint\limits_S (x+y)\,dydz + (y+z)\,dzdx + (z+x)\,dxdy$，其中 S 是以原点为中心，边长为 2 的立方体表面并取外侧为正向；

(3) $\iint\limits_S xy\,dydz + yz\,dzdx + xz\,dxdy$，其中 S 是由平面 $x=y=z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围的四面体表面并取外侧为正向；

(4) $\iint\limits_S yz\,dzdx$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的上半部分并取外侧为正向；

(5) $\iint\limits_S x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$，其中 S 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 并取外侧为正向.

2. 设某流体的流速为 $\boldsymbol{v}=(k,y,0)$，求单位时间内从球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的内部流过球面的流量.

---

3. 计算第二型曲面积分

$$I=\iint\limits_S f(x)\,dydz + g(y)\,dzdx + h(z)\,dxdy,$$

其中 S 是平行六面体 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$，$0\leqslant z\leqslant c$ 的表面并取外侧为正向，$f(x)$，$g(y)$，$h(z)$ 为 S 上的连续函数.

4. 设磁场强度为 $E(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$，求从球内出发通过上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$z\geqslant 0$ 的磁通量.

1.

(1) $\iint\limits_S y(x-z)\,dydz = \iint\limits_{D_{yz}} (y(a-z)+yz)\,dydz = \int_0^a dy\int_0^a ay\,dz = \frac{1}{2}a^4$

$\iint\limits_S x^2\,dzdx = \iint\limits_{D_{zx}} (x^2-x^2)\,dzdx = 0$

$\iint\limits_S (y^2+xz)\,dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} (y^2+xa-y^2)\,dxdy = \int_0^a dx\int_0^a ax\,dy = \frac{1}{2}a^4$

$I = \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2}a^4 = a^4$

(2) $\iint\limits_S (x+y)\,dydz = \iint\limits_{D_{yz}} ((1+y)-(-1+y))\,dydz = \int_{-1}^1 dz\int_{-1}^1 2\,dy = 8$

同理 $\iint\limits_S (y+z)\,dzdx = \iint\limits_S (z+x)\,dxdy = 8$

$I = 8+8+8 = 24$

(3) $\iint\limits_S xy\,dydz = \iint\limits_{D_{yz}} ((1-y-z)y-0)\,dydz = \int_0^1 dz\int_0^{1-z}(1-y-z)y\,dy = \frac{1}{24}$

同理 $\iint\limits_S yz\,dzdx = \iint\limits_S zx\,dxdy = \frac{1}{24}$

$I = \frac{1}{24}+\frac{1}{24}+\frac{1}{24} = \frac{1}{8}$

(4) $x=\cos\theta\sin\varphi$，$y=\sin\theta\sin\varphi$，$z=\cos\varphi$，$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = \sin\theta\sin^2\varphi$

$I = \iint\limits_D \sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\,d\theta d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{2\pi}\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\,d\theta = \frac{1}{4}\pi$

(5) $I = \frac{8}{3}\pi R^2(a+b+c)$

2. $I = \iint\limits_S k\,dydz + y\,dzdx = 0 + \iint\limits_S y\,dzdx = \frac{32}{3}\pi$

3. $I = \iint\limits_{D_{yz}} (f(a)-f(0))\,dydz + \iint\limits_{D_{zx}} (g(b)-g(0))\,dzdx + \iint\limits_{D_{xy}} (h(c)-h(0))\,dxdy = [f(a)-f(0)]bc + [g(b)-g(0)]ca + [h(c)-h(0)]ab$

4. $\Phi = \iint\limits_S x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{2\pi} a^3\cos^3\varphi\sin\varphi\,d\theta = \frac{2}{3}\pi a^3$

习 题 22.3

1. 应用高斯公式计算下列曲面积分：

(1) $\oiint\limits_S yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧；

(2) $\oiint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是立方体 $0 \leqslant x,y,z \leqslant a$ 表面的外侧；

(3) $\oiint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=h$ 所围空间区域 $(0 \leqslant z \leqslant h)$ 的表面，方向取外侧；

(4) $\oiint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧；

(5) $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的外侧.

2. 应用高斯公式计算三重积分

$$\iiint\limits_V (xy+yz+zx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V 是由 $x\geqslant 0, y\geqslant 0, 0\leqslant z\leqslant 1$ 与 $x^2+y^2\leqslant 1$ 所确定的空间区域.

3. 应用斯托克斯公式计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x + (x^2+z^2)\mathrm{d}y + (x^2+y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 为 $x+y+z=1$ 与三坐标面的交线，它的走向使所围平面区域上侧在曲线的左侧；

(2) $\oint_L x^2y^3\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$，其中 L 为 $y^2+z^2=1, x=y$ 所交的椭圆的正向；

(3) $\oint_L (z-y)\mathrm{d}x + (x-z)\mathrm{d}y + (y-x)\mathrm{d}z$，其中 L 为以 $A(a,0,0), B(0,a,0), C(0,0,a)$ 为顶点的三角形沿 $ABCA$ 的方向.

4. 求下列全微分的原函数：

(1) $yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$；

(2) $(x^2-2yz)\mathrm{d}x + (y^2-2xz)\mathrm{d}y + (z^2-2xy)\mathrm{d}z$.

5. 验证下列线积分与路线无关，并计算其值：

(1) $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y - z^3\mathrm{d}z$；

(2) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 (x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2) 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上.

---

6. 证明：由曲面 S 所包围的立体 V 的体积 ΔV 为

$$\Delta V = \frac{1}{3}\oiint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线方向余弦.

7. 证明：若 S 为封闭曲面，$\boldsymbol{l}$ 为任何固定方向，则

$$\oiint\limits_S \cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}})\mathrm{d}S = 0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法线方向.

8. 证明公式

$$\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r} = \frac{1}{2}\oiint\limits_S \cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}})\mathrm{d}S,$$

其中 S 是包围 V 的曲面，$\boldsymbol{n}$ 是 S 的外法线方向，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$.

9. 若 L 是平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ 上的闭曲线，它所包围区域的面积为 S，求

$$\oint_L \begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

其中 L 依正向进行.

1.

(1) $I=\iiint\limits_V 0\,dxdydz=0$

(2) $I=\iiint\limits_V (2x+2y+2z)\,dxdydz = 2\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a (x+y+z)\,dz = 3a^4$

(3) $I=\iiint\limits_V (2x+2y+2z)\,dxdydz$

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=z,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le h,\ r\le z\le h$

$I=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h dr\int_r^h (r\cos\theta+r\sin\theta+z)\cdot r\,dz=\frac{\pi}{2}h^4$

(4) $I=\iiint\limits_V (3x^2+3y^2+3z^2)\,dxdydz$

$x=r\cos\theta\sin\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\varphi,\ \ 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi$

$I=3\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^4\sin\varphi\,dr=\frac{12}{5}\pi$

(5) $I=\iiint\limits_V (1+1+1)\,dxdydz = 3\iiint\limits_V dxdydz = 2a^3\pi$

2. $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=z,\ \ 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le z\le 1$

$I=\int_0^1 dz\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 (r^3\sin\theta\cos\theta+r^2z\sin\theta+r^2z\cos\theta)\,dr=\frac{11}{24}$

$I=\oiint\limits_S xyz\,dydz+xyz\,dzdx+xyz\,dxdy$

$\oiint\limits_S xyz\,dxdy=\iint\limits_{D_{xy}} xy\cdot 1\,dxdy-\iint\limits_{D_{xy}} xy\cdot 0\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^3\sin\theta\cos\theta\,dr=\frac{1}{8}$

$\oiint\limits_S xyz\,dydz=\iint\limits_{D_{yz}} yz\sqrt{1-y^2}\,dydz=\int_0^1 z\,dz\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,dy=\frac{1}{6}$

同理 $\oiint\limits_S xyz\,dzdx=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{11}{24}$

3.

(1) $I=\iint\limits_S (2y-2z)\,dydz+(2z-2x)\,dzdx+(2x-2y)\,dxdy$

$\iint\limits_S (2x-2y)\,dxdy=2\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x-y)\,dy=0$

$\Rightarrow I=3\times 0=0$

(2) $I=\iint\limits_S -3x^2y^2\,dxdy=-3\iint\limits_{D_{xy}} x^2y^2\,dxdy=0$

(3) $I=\iint\limits_S 2dydz+2dzdx+2dxdy=2\left(\iint\limits_{D_{xy}} dxdy+\iint\limits_{D_{yz}} dydz+\iint\limits_{D_{zx}} dzdx\right)=3a^2$

4.

(1) $d(xyz)=yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz$

$\Rightarrow u=xyz+C$

(2) $d\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{3}z^3-2xyz\right)=(x^2-2yz)\,dx+(y^2-2zx)\,dy+(z^2-2xy)\,dz$

$\Rightarrow u=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{3}z^3-2xyz+C$

5.

(1) $d\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}z^4\right)=x\,dx+y^2dy-z^3dz$

$I=\int_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} d\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}z^4\right)=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}z^4\right)\Big|_{(1,1,1)}^{(2,3,4)}=-\frac{643}{12}$

(2) $d\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$I=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} d\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}-\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}=0$

6. $\oiint_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS=\oiint_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy=\iiint_V(1+1+1)\,dxdydz=3(\Delta V)$

7. 设$\vec{n}$,$\vec{l}$的方向余弦分别为$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, $(\cos\alpha',\cos\beta',\cos\gamma')$

则$\cos\langle\vec{n},\vec{l}\rangle=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'$

$\oiint_S(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma')ds=\oiint_S\cos\alpha'dydz+\cos\beta'dzdx+\cos\gamma'dxdy=\iiint_V\left(\frac{\partial\cos\alpha'}{\partial x}+\frac{\partial\cos\beta'}{\partial y}+\frac{\partial\cos\gamma'}{\partial z}\right)dxdydz=0$

8. $\cos\langle\vec{r},\vec{n}\rangle=\cos\langle\vec{r},\vec{x}\rangle\cos\langle\vec{n},\vec{x}\rangle+\cos\langle\vec{r},\vec{y}\rangle\cos\langle\vec{n},\vec{y}\rangle+\cos\langle\vec{r},\vec{z}\rangle\cos\langle\vec{n},\vec{z}\rangle=\frac{x}{r}\cos\langle\vec{n},\vec{x}\rangle+\frac{y}{r}\cos\langle\vec{n},\vec{y}\rangle+\frac{z}{r}\cos\langle\vec{n},\vec{z}\rangle$

$I=\oiint_S\frac{1}{r}[x\cos\langle\vec{n},\vec{x}\rangle+y\cos\langle\vec{n},\vec{y}\rangle+z\cos\langle\vec{n},\vec{z}\rangle]dS=\oiint_S\frac{x}{r}dydz+\frac{y}{r}dzdx+\frac{z}{r}dxdy=\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r}\right]dxdydz=3\iiint_V\frac{1}{r}dxdydz$

9. $I=\iint_D\cos\alpha\,dydz+\cos\beta\,dzdx+\cos\gamma\,dxdy=2\iint_D(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)dS=2S$