Chapter XII

Definition 12.1 (数项级数)

对于数列$\{u_n\}$，称$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$为数项级数，$u_n$为数项级数的通项.

数项级数的前n项之和记为$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n$，称作数项级数的第n个部分和.

若$\{S_n\}$收敛，$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$，则称数项级数收敛，S为数项级数的和，记作$\sum u_n=S$；若$\{S_n\}$发散，则数列级数发散.

Corollary 12.1

任给一个数列$\{a_n\}$，若将其看作某一数项级数的部分和数列，则该级数即为$\sum u_n=a_1+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})+\cdots$. 此时$\{a_n\}$与$\sum u_n$具有相同的敛散性，且当$\{a_n\}$收敛时，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\sum u_n$.

Theorem 12.1 (级数收敛的Cauchy准则)

级数$\sum u_n$收敛的充要条件是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$ s.t. $\forall m>N$，$p\in\mathbb{Z}^+$，$\left|\sum\limits_{k=1}^{p}u_{m+k}\right|<\epsilon$.

证 由Corollary 12.1和数列极限的Cauchy准则即证.

Corollary 12.2

若$\sum u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

证 由Theorem 12.1易推知.

Theorem 12.2

若级数$\sum u_n$与$\sum v_n$均收敛，则对任意常数c, d，级数$\sum(cu_n+dv_n)$收敛，且$\sum(cu_n+dv_n)=c\sum u_n+d\sum v_n$.

证 由数列极限的四则运算易证.

Theorem 12.3

增加、去掉或改变级数的有限项不改变级数的敛散性.

证 由Theorem 12.1易推知.

Theorem 12.4

在收敛级数中任意加括号，既不改变级数的收敛性，也不改变级数的和.

证 设级数$\sum u_n$收敛，其和为S，部分和数列为$\{S_n\}$.

记$v_1=u_1+u_2+\cdots+u_{n_1}$，$v_2=u_{n_1+1}+u_{n_1+2}+\cdots+u_{n_2}$，…，$v_k=u_{n_{k-1}+1}+u_{n_{k-1}+2}+\cdots+u_{n_k}$，… .

则级数$\sum v_n$的部分和数列$\{S_{n_k}\}$是$\{S_n\}$的子列.

故$\lim\limits_{k\to+\infty}S_{n_k}=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$，即证.

注 从级数加括号后的收敛不能推知其加括号前也收敛. 例如$(1-1)+(1-1)+\cdots=0$，但$1-1+1-1+\cdots$发散.

Theorem 12.5

正项级数$\sum u_n$收敛的充要条件是：部分和数列$\{S_n\}$有界，即$\exists M>0$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N}^+$，$S_n<M$.

证 $u_n\geq0\Rightarrow\{S_n\}$单增. 由单调有界定理易证.

Theorem 12.6 (比较原则)

设 $\sum u_n, \sum v_n$ 是两个正项级数. 若存在某正数 N, 对一切 $n>N$ 都有 $u_n \le v_n$, 则
(i) 若 $\sum v_n$ 收敛, 则 $\sum u_n$ 收敛;
(ii) 若 $\sum u_n$ 发散, 则 $\sum v_n$ 发散.

证 (ii) 为 (i) 的逆否命题. 下证 (i):
设 $\sum u_n, \sum v_n$ 的部分和分别为 S_n, T_n.
由改变级数的有限项不改变级数的敛散性, 不妨令 $u_n \le v_n$ 对一切正整数成立
则 $\forall n \in N^+$, $S_n \le T_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n \le \lim\limits_{n\to+\infty} T_n$
又 $\sum v_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} T_n$ 存在 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ 存在 $\Rightarrow \{S_n\}$ 有界
故 $\sum u_n$ 收敛

Corollary 12.3

设 $\sum u_n, \sum v_n$ 是两个正项级数. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell$, 则
(i) 当 $\ell \in (0, +\infty)$ 时, $\sum u_n, \sum v_n$ 敛散性相同;
(ii) 当 $\ell = 0$ 时, 若 $\sum v_n$ 收敛, 则 $\sum u_n$ 收敛;
(iii) 当 $\ell = +\infty$ 时, 若 $\sum v_n$ 发散, 则 $\sum u_n$ 发散.

证 (i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ s.t. $\forall n > N$, $\left|\frac{u_n}{v_n} - \ell\right| < \varepsilon \Rightarrow (\ell-\varepsilon) v_n < u_n < (\ell+\varepsilon) v_n$
由 ε 的任意性与比较原则即证.
(ii)(iii) 由比较原则易推知.

Theorem 12.7 (d'Alembert 判别法, 比式判别法)

设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且存在某正整数 N_0 及常数 $q \in (0,1)$.
(i) 若对一切 $n > N_0$, 有 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q$, 则 $\sum u_n$ 收敛;
(ii) 若对一切 $n > N_0$, 有 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$, 则 $\sum u_n$ 发散.

证 (i) 不妨设 $\forall n \ge 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q$
则 $\prod\limits_{k=1}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \le q^{n-1} \Rightarrow u_n \le u_1 q^{n-1}$
又当 $q \in (0,1)$ 时, $\sum q^{n-1}$ 收敛, 则由比较原则易得 $\sum u_n$ 收敛.
(ii) 由题设得 $u_{n+1} \ge u_n \ge u_{N_0} > 0$, 故 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > 0$
由 Corollary 12.2 即知 $\sum u_n$ 发散.

Corollary 12.4 (比式判别法的极限形式)

设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, 则
(i) 当 $q < 1$ 时, $\sum u_n$ 收敛;
(ii) 当 $q > 1$ (可为 $+\infty$) 时, $\sum u_n$ 发散.

证 令 $\varepsilon = \frac{1}{2}|1-q|$, $\exists N > 0$ s.t. $\forall n > N$, $q - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < q + \varepsilon$.
当 $q < 1$ 时, $q + \varepsilon = \frac{1}{2}(1+q) < 1$, 由比式判别法即得 $\sum u_n$ 收敛.
当 $q > 1$ 时, $q - \varepsilon = \frac{1}{2}(1+q) > 1$, 由比式判别法即得 $\sum u_n$ 发散.

注 当 $q = 1$ 时, 比式判别法不能判断级数的敛散性. 例如 $\sum \frac{1}{n}$ 和 $\sum \frac{1}{n^2}$, 其比式极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. 但前者发散, 后者收敛

Theorem 12.8 (Cauchy 判别法, 根式判别法)

设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且存在某正数 N_0 及常数 $\ell \in (0,1)$,
(i) 若对一切 $n > N_0$, 有 $\sqrt[n]{u_n} \le \ell$, 则 $\sum u_n$ 收敛;

(ii) 若对一切 $n>N_0$，有 $\sqrt[n]{u_n}\ge 1$，则 $\sum u_n$ 发散.

证 (i) 由题设得 $u_n\le \ell^n$.

当 $\ell\in(0,1)$ 时，$\sum \ell^n$ 收敛，则由比较原则易得 $\sum u_n$ 收敛.

(ii) 由题设得 $u_n\ge 1^n>0$，故 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n>0$

由 Corollary 12.2 即知 $\sum u_n$ 发散.

Corollary 12.5 (根式判别法的极限形式)

设 $\sum u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\ell$，则

(i) 当 $\ell<1$ 时，$\sum u_n$ 收敛；

(ii) 当 $\ell>1$ 时，$\sum u_n$ 发散.

证 令 $\varepsilon<|1-\ell|$，$\exists N>0$ s.t. $\forall n>N$，$\ell-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<\ell+\varepsilon$.

由 ε 的任意性与根式判别法即证.

注 类似地，当 $\ell=1$ 时，根式判别法不能判断级数的敛散性.

Example 12.1

判断 $\sum\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 的敛散性.

解 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2}=\frac{1}{2}$

故 $\sum\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 收敛.

注 尝试应用比式判别法，得 $\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{u_{2m}}{u_{2m-1}}=\frac{3}{2}$，$\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{u_{2m+1}}{u_{2m}}=\frac{1}{6}$. 故比式判别法无法判断该级数的敛散性.

事实上，由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$ 能推出 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$，故凡能由比式判别法判断敛散性的级数必能由根式判别法判断. 又由本例表明反之不成立. 故总的来说，根式判别法较比式判别法更有效.

Theorem 12.9 (积分判别法)

设 f 是 $[1,+\infty)$ 上的减函数，则 $\sum f(n)$ 收敛的充要条件是反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

证 $\Rightarrow$) $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 又 f 在 $[1,+\infty)$ 上单减，则 $\forall x\in[1,+\infty)$，$f(x)\ge 0\Rightarrow\sum f(n)$ 是正项级数.

则 $\forall m\in N^+$，$\sum\limits_{n=1}^{m}f(n)=f(1)+\sum\limits_{n=2}^{m}f(n)\le f(1)+\int_1^{m}f(x)dx\le f(1)+\int_1^{+\infty}f(x)dx$，即 $\{S_n\}$ 有界.

故 $\sum f(n)$ 收敛

$\Leftarrow$) 若 $\sum f(n)$ 收敛，设 $\sum f(n)=S$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=0$.

又 f 在 $[1,+\infty)$ 上单减，则 $\forall x\in[1,+\infty)$，$f(x)\ge 0\Rightarrow\sum f(n)$ 为正项级数.

$\Rightarrow\forall m\in N^+$，$\int_1^{m}f(x)dx=\sum\limits_{n=2}^{m}\int_{n-1}^{n}f(x)dx\le\sum\limits_{n=1}^{m-1}f(n)\le\sum f(n)=S$.

故 $\forall A>0$，$\exists m\in N^+$ s.t. $A\in(m,m+1]\Rightarrow 0\le\int_1^{A}f(x)dx\le\int_1^{m+1}f(x)dx\le\sum\limits_{n=1}^{m}f(n)\le S$

由比较原则即得 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

Definition 12.2

若级数的各项符号正负相间，即 $u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n+1}u_n+\cdots$ $(u_n>0,\ n=1,2,\dots)$，则称其为交错级数.

Theorem 12.10 (Leibniz 判别法)

若交错级数 $\sum(-1)^{n+1}u_n$ $(u_n>0)$ 满足下述两个条件：

(i) 数列 $\{u_n\}$ 单调递减；

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$，

则级数 $\sum(-1)^{n+1}u_n$ 收敛.

证 设 $\sum(-1)^{n+1}u_n$ 的部分和为 S_n.

考察 $\{S_n\}$ 的奇数项与偶数项:

$$S_{2n-1}=u_1-(u_2-u_3)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})$$

$$S_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})$$

由 $\{u_n\}$ 单调递减可知, $\{S_{2n-1}\}$ 递减, $\{S_{2n}\}$ 递增

又 $S_{2n-1}-S_{2n}=u_{2n}>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n-1}-S_{2n})=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n}=0$

故 $\{[S_{2n},S_{2n-1}]\}$ 是一个区间套.

由区间套定理, 存在唯一的一个数 S 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}=S$.

故 $\{S_n\}$ 收敛, 从而 $\sum(-1)^{n+1}u_n$ 收敛.

Corollary 12.6

若 $\sum(-1)^{n+1}u_n$ $(u_n>0)$ 满足 Leibniz 判别法的条件, 且 $\sum(-1)^{n+1}u_n=S$, 则 $|S-S_n|\le u_{n+1}$.

证 由前述证明中对 $\{S_n\}$ 的单调性分析易证.

注 常记 $R_n=S-S_n$, 称作 $\sum u_n$ 的第 n 个余项.

Definition 12.3

对于级数 $\sum u_n$, 若 $\sum|u_n|$ 收敛, 则称 $\sum u_n$ 为绝对收敛级数.

若 $\sum u_n$ 收敛, $\sum|u_n|$ 发散, 则称 $\sum u_n$ 为条件收敛级数.

Theorem 12.11

绝对收敛级数一定收敛.

证 $\sum|u_n|$ 收敛 $\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N>0$ s.t. $\forall m>N, p\in\mathbb{Z}^+$, $\sum\limits_{k=m+1}^{m+p}|u_n|<\varepsilon$

又 $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{m+p}u_n\right|\le\sum\limits_{k=m+1}^{m+p}|u_n|<\varepsilon$

故 $\sum u_n$ 收敛.

Definition 12.4

我们将正整数列 $\{1,2,\dots,n,\dots\}$ 到其自身的双射 $f:n\to k(n)$ 称作正整数列的重排. 相应地对于数列 $\{u_n\}$ 按映射 $F:u_n\to u_{k(n)}$ 所得到的数列 $\{u_{k(n)}\}$ 称作原数列的重排, $\sum u_{k(n)}$ 称作 $\sum u_n$ 的重排.

Theorem 12.12

设 $\sum u_n$ 绝对收敛, 且 $\sum u_n=S$, 则 $\sum u_n$ 的任意重排 $\sum v_n$ 也绝对收敛, 且 $\sum v_n=S$.

注 条件收敛级数适当重排后, 可得到发散级数, 或收敛于任意指定的数.

Theorem 12.13 (Cauchy定理)

若 $\sum u_n$, $\sum v_n$ 均绝对收敛, 且 $\sum u_n=A$, $\sum v_n=B$, 则对所有乘积项 u_iv_j 按任意顺序排列所得到的级数 $\sum w_n$ 也绝对收敛, 且 $\sum w_n=AB$

Theorem 12.14 (分部求和公式, Abel变换)

设 $\varepsilon_i,v_i\in\mathbb{R}$ $(i=1,2,\dots,n)$, $\sigma_k=\sum\limits_{i=1}^{k}v_i$ $(k=1,2,\dots,n)$, 则有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_iv_i=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sigma_1+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\sigma_2+\cdots+(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)\sigma_{n-1}+\varepsilon_n\sigma_n$.

证 $\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_iv_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i(\sigma_i-\sigma_{i-1})=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sigma_1+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\sigma_2+\cdots+(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)\sigma_{n-1}+\varepsilon_n\sigma_n$.

Corollary 12.7 (Abel引理)

设 $\varepsilon_i,v_i\in\mathbb{R}$ $(i=1,2,\dots,n)$, $\sigma_k=\sum\limits_{i=1}^{k}v_i$ $(k=1,2,\dots,n)$. 若

(i) $\{\varepsilon_i\}$ 单调;

(ii) $\forall k\in\mathbb{Z}^+$, $|\sigma_k|\le A$

则记 $\varepsilon=\max\limits_k\{|\varepsilon_k|\}$, 有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k v_k\right|\le 3\varepsilon A$

证 $\{\varepsilon_i\}$ 单调 $\Rightarrow$ $\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \varepsilon_2-\varepsilon_3,\dots,\ \varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n$ 同号

故 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i v_i\right|=\left|(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sigma_1+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\sigma_2+\cdots+(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)\sigma_{n-1}+\varepsilon_n\sigma_n\right|$

$$\begin{aligned}&\le A\left|(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)+\cdots+(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)\right|+A|\varepsilon_n|\\&=A|\varepsilon_1-\varepsilon_n|+A|\varepsilon_n|\\&\le A(|\varepsilon_1|+2|\varepsilon_n|)\\&\le 3\varepsilon A\end{aligned}$$

Theorem 12.15 (Abel判别法)

若 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, 级数 $\sum b_n$ 收敛, 则 $\sum a_nb_n$ 收敛.

证 $\sum b_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ s.t. $\forall m>N$, $p\in\mathbb{Z}^+$, $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{m+p}b_k\right|<\varepsilon$

$\{a_n\}$ 有界 $\Rightarrow$ $\exists M>0$ s.t. $|a_n|\le M$

由Abel引理可得 $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{m+p}a_kb_k\right|\le 3M\varepsilon$

由 ε 的任意性可知 $\sum a_nb_n$ 收敛.

Theorem 12.16 (Dirichlet判别法)

若 $\{a_n\}$ 单调递减, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$, $\{\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\}$ 有界, 则 $\sum a_nb_n$ 收敛.

证 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0\Rightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ s.t. $\forall n>N$, $|a_n|<\varepsilon$

$\{\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\}$ 有界 $\Rightarrow\exists M>0$ s.t. $\forall m>N$, $p\in\mathbb{Z}^+$, $\sum\limits_{k=m+1}^{m+p}b_k<M$

由Abel引理可得 $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{m+p}a_kb_k\right|\le 3M\varepsilon$

由 ε 的任意性可知 $\sum a_nb_n$ 收敛.

Example 12.2

若 $\{a_n\}$ 单调递减, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$, 则对任意 $x\in(0,2\pi)$, $\sum a_n\sin nx$ 和 $\sum a_n\cos nx$ 都收敛.

证 $2\sin\frac{x}{2}\left(\frac12+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx\right)=\sin\frac{x}{2}+\left(\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)+\cdots+\left[\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\sin\frac{(2n-1)x}{2}\right]=\sin\frac{(2n+1)x}{2}$

当 $x\in(0,2\pi)$ 时, $\sin\frac{x}{2}\ne0$, 则 $\frac12+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx=\dfrac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$ $\Rightarrow\{\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx\}$ 有界

由Dirichlet判别法可得 $\sum a_n\cos nx$ 收敛.

类似可证 $\sum a_n\sin nx$ 收敛.

注 一个重要的特殊情形是对任意 $x\in(0,2\pi)$, $\sum\frac{\sin nx}{n}$ 和 $\sum\frac{\cos nx}{n}$ 均收敛.

Chapter XIII

Definition 13.1

设 $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ 是一列定义在同一数集 E 上的函数，称为定义在 E 上的函数列，常记作 $\{f_n\}$ 或 $f_n, n=1,2,\dots$

设 $x_0 \in E$，将 x_0 代入 $\{f_n\}$ 可得数列 $f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_n(x_0), \dots$ 若 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛，则称函数列 $\{f_n\}$ 在 $x=x_0$ 处收敛，x_0 称作函数列 $\{f_n\}$ 的收敛点。若 $\{f_n(x_0)\}$ 发散，则称 $\{f_n\}$ 在 $x=x_0$ 处发散。

若 $\{f_n\}$ 对数集 $D \subseteq E$ 上每一点都收敛，则称 $\{f_n\}$ 在数集 D 上收敛。此时定义 $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x), x \in D$，称作 $\{f_n\}$ 的极限函数。

函数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义是：$\forall x \in D, \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon, x) > 0$ s.t. $\forall n > N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

$\{f_n\}$ 的全体收敛点的集合称作 $\{f_n\}$ 的收敛域。

Definition 13.2

设函数列 $\{f_n\}$ 与函数 f 定义在同一数集 D 上。若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) > 0$ s.t. $\forall n > N, x \in D, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$，则称 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f，记作 $f_n(x) \rightrightarrows f(x) \ (n \to +\infty), x \in D$.

注 一致收敛与点态收敛的关键差异在于：N 的选取是否依赖 x. 故在 D 上一致收敛的 $\{f_n\}$ 必在 D 上每一点都收敛，反之在 D 上每一点都收敛的 $\{f_n\}$ 不一定在 D 上一致收敛。

Theorem 13.1 (函数列一致收敛的 Cauchy 准则)

$\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ s.t. $\forall m, n > N, x \in D, |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

证 由数列极限的 Cauchy 准则易推知。

Corollary 13.1

$\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛的充要条件是：$\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$

证 由上确界的定义易推知。

Definition 13.3

设 $\{f_n\}$ 与 f 定义在区间 I 上。若对任意的 $[a,b] \subseteq I$，$\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f，则称 $\{f_n\}$ 在 I 上内闭一致收敛于 f.

注 若 $I = [\alpha, \beta]$ 是有界闭区间，则 $\{f_n\}$ 在 I 上内闭一致收敛于 f 和 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于 f 是一致的。

Definition 13.4

设 $\{u_n(x)\}$ 是定义在数集 E 上的一个函数列，表达式 $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots, x \in E$ 称为定义在 E 上的函数项级数，简记为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 或 $\sum u_n(x)$. 称 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x), x \in E, n = 1, 2, \dots$ 为 $\sum u_n(x)$ 的部分和函数列。

若 $x_0 \in E$，$\sum u_n(x_0)$ 收敛，则称 $\sum u_n(x)$ 在 $x = x_0$ 处收敛，x_0 称作 $\sum u_n(x)$ 的收敛点。若 $\sum u_n(x_0)$ 发散，则称 $\sum u_n(x)$ 在 $x = x_0$ 处发散。

若 $\sum u_n(x)$ 对数集 $D \subseteq E$ 上每一点都收敛，则称 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上收敛。此时定义 $S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x), x \in D$，称作 $\sum u_n(x)$ 和函数。称 $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ 为 $\sum u_n(x)$ 的余项。

Definition 13.5

设 $\{S_n(x)\}$ 是 $\sum u_n(x)$ 的部分和函数列。若 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$，则称 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$. 若 $\sum u_n(x)$ 在任意闭区间 $[a,b] \subseteq I$ 上一致收敛，则称 $\sum u_n(x)$ 在 I 上内闭一致收敛。

Theorem 13.2 (函数项级数一致收敛的 Cauchy 准则)

$\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛的充要条件为: $\forall \varepsilon>0, \exists N>0$ s.t. $\forall n>N, x\in D, p\in\mathbb{Z}^+$, $|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon$.

证 由函数列一致收敛的 Cauchy 准则易推知.

Corollary 13.2

$\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛的必要条件为: $\{u_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 0.

证 由函数项级数一致收敛的 Cauchy 准则易推知.

Corollary 13.3

$\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$ 的充要条件为: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in D}|R_n(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in D}|S(x)-S_n(x)|=0$.

证 由上确界的定义易推知.

Theorem 13.3 (Weierstrass 判别法, M 判别法, 优级数判别法)

设 $\sum u_n(x)$ 定义在数集 D 上, $\sum M_n$ 为收敛的正项级数. 若 $\forall x\in D$, $|u_n(x)|\le M_n$, $n=1,2,\dots$, 则 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

证 $\sum M_n$ 收敛 $\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0$ s.t. $\forall n>N, p\in\mathbb{Z}^+$, $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} M_k<\varepsilon$

$\Rightarrow \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \le \sum\limits_{k=n+1}^{n+p}|u_k(x)| \le \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} M_k<\varepsilon$

根据 Cauchy 准则, $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

注 满足此条件时称 $\sum M_n$ 在 D 上优于 $\sum u_n(x)$, 或称 $\sum M_n$ 是 $\sum u_n(x)$ 的优级数.

Theorem 13.4 (Abel 判别法)

设 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 定义在区间 I 上, 若

(i) $\sum u_n(x)$ 在 I 上一致收敛;

(ii) $\forall x\in I$, $\{v_n(x)\}$ 单调;

(iii) $\{v_n(x)\}$ 在 I 上一致有界, 即 $\exists M>0$ s.t. $\forall x\in I, n\in N^+$, $|v_n(x)|\le M$.

则 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

证 $\sum u_n(x)$ 在 I 上一致收敛 $\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0$ s.t. $\forall n>N, p\in\mathbb{Z}^+$, $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right|<\varepsilon$

由 Abel 引理得 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right|<3M\varepsilon$

由函数项级数一致连续的 Cauchy 准则即证.

Theorem 13.5 (Dirichlet 判别法)

设 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 定义在区间 I 上, 若

(i) $\sum u_n(x)$ 的部分和函数列 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$, $n=1,2,\dots$ 在 I 上一致有界;

(ii) $\forall x\in I$, $\{v_n(x)\}$ 单调;

(iii) 在 I 上 $v_n(x)\rightrightarrows 0$ $(n\to+\infty)$.

则 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

证 $S_n(x)$ 在 I 上一致有界 $\Rightarrow \exists M>0$ s.t. $\forall x\in I$, $|S_n(x)|\le M \Rightarrow \forall n>0, p\in\mathbb{Z}^+$, $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right| = |S_{n+p}(x)-S_n(x)|\le 2M$

$v_n(x)\rightrightarrows 0$ $(n\to+\infty) \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0$ s.t. $\forall n>N, x\in I$, $|v_n(x)|<\varepsilon$

由 Abel 引理得 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)v_k(x)\right|\le 2M(|v_{n+1}(x)|+2|v_{n+p}(x)|)<6M\varepsilon$

由函数项级数一致连续的 Cauchy 准则即证.

Theorem 13.6

设函数列 $\{f_n\}$ 在 $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ 上一致收敛于 $f(x)$, 且对于每个 n, $\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)=a_n$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 均存在且相等.

证 先证 $\{a_n\}$ 收敛.

$\{f_n\}$ 一致收敛 $\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0$ s.t. $\forall n>N, p\in\mathbb{Z}^+, x\in(a,x_0)\cup(x_0,b)$, $|f_n(x)-f_{n+p}(x)|<\varepsilon$

$\Rightarrow |a_n-a_{n+p}|=\lim\limits_{x\to x_0}|f_n(x)-f_{n+p}(x)|\le\varepsilon$

由 Cauchy 准则得 $\{a_n\}$ 收敛

设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$, 再证 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

$\{f_n\}$ 一致收敛, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0$ s.t. $\forall n>N, x\in(a,x_0)\cup(x_0,b)$, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, $|a_n-A|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0}f_{N+1}(x)=a_{N+1} \Rightarrow \exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0;\delta)$, $|f_{N+1}(x)-a_{N+1}|<\varepsilon$

故 $\forall x\in U^\circ(x_0;\delta)$, $|f(x)-A|\le|f(x)-f_{N+1}(x)|+|f_{N+1}(x)-a_{N+1}|+|a_{N+1}-A|<3\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

注 该定理表明, 在一致收敛的条件下, $\{f_n(x)\}$ 中两个独立变量 x 和 n, 在分别求极限时其求极限顺序可以交换.

即若 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ $(n\to+\infty)$ $x\in U^\circ(x_0)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)$.

Theorem 13.7 (函数列的连续性)

若函数列 $\{f_n\}$ 在区间 I 上一致收敛, 且每一项都连续, 则其极限函数在 I 上也连续.

证 $\forall x_0\in I$, $\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)=f_n(x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x_0)=f(x_0)$, 即证

Corollary 13.4

若定义在区间 I 上, 各项为连续函数的函数列的极限函数不连续, 则此函数列在区间 I 上不一致收敛.

证 由函数列的连续性的逆否命题即证.

Theorem 13.8 (函数列的可积性)

若函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 且每一项都连续, 则 $\int_a^b\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\,dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$.

证 设 $f_n\rightrightarrows f$ $(n\to+\infty)$ $x\in[a,b]$

f_n 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow f_n, f$ 在 $[a,b]$ 上可积.

$f_n\rightrightarrows f$ $(n\to+\infty)$ $x\in[a,b] \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0$ s.t. $\forall n>N, x\in[a,b]$, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

则 $\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b(f_n(x)-f(x))\,dx\right|\le\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\,dx\le\varepsilon(b-a)$

由 ε 的任意性, 得 $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\,dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$

注 该定理表明, 在一致收敛的条件下, 极限运算和积分运算的顺序可以互换.

Theorem 13.9 (函数列的可微性)

若函数列 $\{f_n\}$ 的每一项在 $[a,b]$ 上都可导且导函数连续, $\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则 $\frac{d}{dx}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)$.

证 设 $f_n(x_0)\to A$ $(n\to+\infty)$, $f_n'\rightrightarrows g$ $(n\to+\infty)$, $x\in[a,b]$

由题设可知, $\forall x\in[a,b]$, $f_n(x)=f_n(x_0)+\int_{x_0}^x f_n'(t)\,dt$

由函数列的可积性得, $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)=A+\int_{x_0}^x g(t)\,dt$

由 g 的连续性和微积分学基本定理得 $f'=g$

注 该定理表明, 在一致收敛的条件下, 极限运算和求导运算的顺序可以互换.

事实上, 在这一条件, 还可推出 $f_n\rightrightarrows f$ $(n\to+\infty)$, 具体过程见习题 13.2.2 解答.

Theorem 13.10 (函数项级数的连续性)

若 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 且每一项都连续, 则其和函数在 $[a,b]$ 上也连续.

证 连续函数的和仍是连续函数, 即证.

注 该定理表明, 在一致收敛的条件下, 极限运算和求和运算的顺序可以互换, 即 $\sum\left(\lim\limits_{x\to x_0}u_n(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\sum u_n(x)\right)$

Theorem 13.11 (逐项求积)

若$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛，且每一项都连续，则$\sum\int_a^b u_n(x)\,dx=\int_a^b\sum u_n(x)\,dx$

证 由函数列的可积性易推知.

注 该定理表明，在一致收敛的条件下，积分运算和求和运算的顺序可以互换

Theorem 13.12 (逐项求导)

若$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛，且每一项都连续，则$\sum\frac{d}{dx}u_n(x)=\frac{d}{dx}\sum u_n(x)$

证 由函数列的可导性易推知.

注 该定理表明，在一致收敛的条件下，求导运算和求和运算的顺序可以互换

Chapter XIV

Definition 14.1

由幂函数列$\{a_n(x-x_0)^n\}$生成的函数项级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$称为幂级数.

注 在之后的讨论中,我们主要关注$x_0=0$,即$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$的情形.

Theorem 14.1 (Abel定理)

(i) 若$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在$x=\bar{x}\neq 0$处收敛,则对任意$x$满足$|x|<|\bar{x}|$,$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$绝对收敛;

(ii) 若$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在$x=\bar{x}\neq 0$处发散,则对任意$x$满足$|x|>|\bar{x}|$,$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$发散.

证

(i) $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\bar{x}^n$收敛$\Rightarrow\{a_n\bar{x}^n\}$有界$\Rightarrow\exists M>0$ s.t. $\forall n\in N$, $|a_n\bar{x}^n|<M$

令$r=\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|$,则$\forall x$满足$|x|<|\bar{x}|$, $r<1$

则$|a_nx^n|=|a_n\bar{x}^n|\cdot\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n<Mr^n$

$\sum_{n=0}^{+\infty}Mr^n$收敛$\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$绝对收敛

(ii) 假设$\exists x$满足$|x|>|\bar{x}|$,$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$收敛,则$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\bar{x}^n$收敛,与题设矛盾!

故$\forall x$满足$|x|>|\bar{x}|$,$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$发散

Definition 14.2

由Abel定理可知,$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$的收敛域是以原点为中心的区间.若以$2R$表示区间的长度,则称$R$为幂级数的收敛半径,$(-R,R)$为幂级数的收敛区间.

注 当$R\in(0,+\infty)$时,幂级数在$x=\pm R$处可能收敛也可能发散.

Theorem 14.2

对于幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$,若$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$,则

(i) 当$\rho=0$时,$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$的收敛半径$R=+\infty$;

(ii) 当$0<\rho<+\infty$时,$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$的收敛半径$R=\frac{1}{\rho}$;

(iii) 当$\rho=+\infty$时,$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$的收敛半径$R=0$.

证 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_nx^n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\,|x|=\rho|x|$

由级数的根式判别法即证.

注 事实上,由于$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$能推出$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$,我们也可用级数的比式判别法来推出幂级数的收敛半径.

Theorem 14.3

若$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$,则$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在任一闭区间$[a,b]\subseteq(-R,R)$上一致收敛.

证 设$\bar{x}=\max\{|a|,|b|\}\in(-R,R)$,则$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\bar{x}^n$收敛.

又$\forall x\in[a,b]$, $|a_nx^n|\leq|a_n\bar{x}^n|$

故由Weierstrass判别法得,$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在$[a,b]$上一致收敛.

Theorem 14.4

若$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$,且在$x=R$(或$x=-R$)处收敛,则$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在$[0,R]$(或$[-R,0]$)上一致收敛.

证 $\forall x\in[0,R]$, $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\left(\frac{x}{R}\right)^n$

$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nR^n$收敛,$\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\right\}$在$[0,R]$上递减且一致有界

故由Abel判别法，$\sum_{n=0}^{+\infty}$在$[0,R]$上一致收敛.

Theorem 14.5

若$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$，则$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在$(-R,R)$上连续；若$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在$x=R$（或$x=-R$）处收敛，则$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在$x=R$（或$x=-R$）处连续.

证 由函数项级数的连续性即得.

Theorem 14.6

$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$与以下两个幂级数有相同的收敛半径：

(i) 对$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$逐项求导：$\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$

(2) 对$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$逐项求积：$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

证 只需证$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$和$\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$有相同的收敛区间，因为对$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$逐项求导即得到$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

由Abel定理，$\forall x_0\in(-R,R)$，$\exists M>0, r<1$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N}$, $|a_nx_0^n|<Mr^n$.

故 $|na_nx_0^{n-1}|=|\frac{n}{x_0}||a_nx_0^n|<\frac{M}{|x_0|}nr^n$

由比式判别法得，$\sum_{n=0}^{+\infty}nr^n$收敛 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}|na_nx_0^{n-1}|$收敛 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}|na_nx^{n-1}|$在$(-R,R)$上收敛

假设$\exists x_0$满足$|x_0|>R$ s.t. $\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx_0^n$收敛

令$\bar{x}$满足$|x_0|>|\bar{x}|>R$，由Abel定理得，$\sum_{n=1}^{+\infty}|na_n\bar{x}^n|$收敛

当$n\geq|\bar{x}|$时，$|na_n\bar{x}^{n-1}|=\frac{n}{|\bar{x}|}|a_n\bar{x}^n|\geq|a_n\bar{x}^n|$

故$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n\bar{x}^n|$收敛，与题设矛盾！

故 $\forall x$满足$|x|>R$，$\sum_{n=1}^{+\infty}|na_nx^{n-1}|$发散

综上，$\sum_{n=1}^{+\infty}|na_nx^{n-1}|$的收敛区间为$(-R,R)$

Theorem 14.7（幂级数的逐项求积和逐项求导）

设$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在收敛区间$(-R,R)$上的和函数为$f$，则$\forall x_0\in(-R,R)$，有

(i) f在$x=x_0$处可导，且$f'(x_0)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$

(ii) f在$[0,x_0]$（或$[x_0,0]$）上可积，且$\int_0^{x_0}f(x)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

证 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$和$\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$，$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$收敛区间相同，则由函数项级数的逐项求积和逐项求导即得.

Corollary 14.1

若$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在收敛区间上的和函数为$f$，则$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(n+k)!}{k!}a_{n+k}x^k$.

证 由幂级数的逐项求导即证.

Corollary 14.2

若$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在收敛区间上的和函数为$f$，则$a_0=f(0)$，$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $(n=1,2,\dots)$

证 由Corollary 14.1即得.

注 该推论表明，若$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在$(-R,R)$上有和函数$f$，则$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$由$f$在$x=0$处的各阶导数唯一确定.

Definition 14.3

若$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$和$\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$在$x=0$的某邻域内有相同的和函数，则称这两个幂级数在该邻域内相等.

Theorem 14.8

若$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$和$\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$在$x=0$的某邻域内相等，则$a_n=b_n$ $(n=0,1,2,\dots)$.

证 由Corollary 14.2即得.

Theorem 14.9

若 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_a 和 R_b，则 $\forall\lambda$，$R=\min\{R_a,R_b\}$，$c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$，有

- $\lambda\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lambda a_nx^n$，$|x|<R$
- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\pm\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(a_n\pm b_n)x^n$，$|x|<R$
- $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_nx^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$，$|x|<R$

证 由数项级数相关性质可推得.

Definition 14.4

若函数 f 在点 x_0 的某邻域上存在任意阶的导数，则称级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为函数 f 在 $x=x_0$ 处的 Taylor 级数，右式为 f 在 x_0 处的 Taylor 展开式，或称幂级数展开式

特别地，若将 f 在 $x_0=0$ 处展开，所得的展开式 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称作 f 的 Maclaurin 级数

Theorem 14.10

设 f 在 $x=x_0$ 处有任意阶导数，则 $\forall x\in U(x_0;r)$，$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 的充要条件是：$\forall x\in U(x_0;r)$，$\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(x)=0$，其中 $R_n(x)$ 是 f 在 $x=x_0$ 处的 Taylor 公式余项.

证 由 Taylor 公式的定义即证.

Example 14.1 (常见函数的幂级数展开式)

- $e^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$
- $\sin x=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$
- $\cos x=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，收敛域为 $(-1,1]$
- $(1+x)^\alpha=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}x^n$

  当 $\alpha\leq-1$ 时，收敛域为 $(-1,1)$；当 $-1<\alpha<0$ 时，收敛域为 $(-1,1]$；当 $\alpha>0$ 时，收敛域为 $[-1,1]$
- $\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
- $\arcsin x=x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

证 对 $(1+x)^\alpha$ 的幂级数展开式，令 $\alpha=-1$ 得，$\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n$

令 $x=x^2$，则 $\frac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^{2n}$，逐项求积得 $\arctan x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

对 $(1+x)^\alpha$ 的幂级数展开式，令 $\alpha=-\frac{1}{2}$ 得，$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$

令 $x=-x^2$，则 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$，逐项求积得 $\arcsin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Chapter XV

Definition 15.1

正弦函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 可以表示简谐运动，这是一种周期运动. 其中 A 为振幅，φ 为初相角，ω 为角频率，周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

对于更复杂的周期运动，其通常可以由若干个简谐运动叠加得到. 对于无穷多个简谐运动叠加得到函数项级数 $A_0+\sum A_n\sin(nwx+\varphi_n)$，若其收敛，则其描述的是更为一般的周期运动现象.

一般地，我们只需要讨论 $w=1$ 的情形. 由于 $\sin(nx+\varphi_n)=\sin\varphi_n\cos nx+\cos\varphi_n\sin nx$，故可记 $A_0=\frac{a_0}{2}$，$A_n\sin\varphi_n=a_n$，$A_n\cos\varphi_n=b_n$，则原函数项级数可改写为 $\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，即由三角函数列（或称三角函数系）$1,\cos x,\sin x,\dots,\cos nx,\sin nx,\dots$ 所产生的一般形式的三角级数.

注 若三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 收敛，则其和函数一定是以 2π 为周期的周期函数

Theorem 15.1

若级数 $\frac{|a_0|}{2}+\sum(|a_n|+|b_n|)$ 收敛，则三角级数 $\frac{|a_0|}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对收敛且一致收敛.

证 $\forall x\in\mathbb{R}$，$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\le|a_n|+|b_n|$

由 Weierstrass 判别法即证.

Definition 15.2

若两个函数 φ 和 ψ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\,dx=0$，则称 φ 和 ψ 在 $[a,b]$ 上是正交的.

Corollary 15.1

三角函数系 $1,\cos x,\sin x,\dots,\cos nx,\sin nx,\dots$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上具有正交性，是一个正交函数系.

证 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0$

$\forall m\neq n$，$\int\cos mx\cos nx\,dx=\int\sin mx\sin nx\,dx=0$

$\int\cos mx\sin x=0$

注 该三角函数系中任意一个函数的平方在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分都不等于零，即 $\int_{-\pi}^{\pi}1^2dx=2\pi$，$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2nx\,dx=\pi$

Theorem 15.2

若 $\forall x\in\mathbb{R}$，$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，且右式级数一致收敛，则有：

- $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$
- $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$

证 由题设，f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续且可积

逐项积分得 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx+\sum\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right)=a_0\pi\Rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$

对原式两边同乘 $\cos kx$ 得 $f(x)\cos kx=\frac{a_0}{2}\cos kx+\sum(a_n\cos nx\cos kx+b_n\sin nx\cos kx)$，易知该级数仍一致收敛

逐项积分得 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx+\sum\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\,dx\right)\Rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=a_k\pi\Rightarrow a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx$

同乘 $\sin kx$ 后类似可得 $b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx$

Definition 15.3

若 f 是以 2π 为周期且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积的函数，则 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$ 称作 f（关于三角函数系）的 Fourier 系数，三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 称作 f（关于三角函数系）的 Fourier 级数，记作 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

Definition 15.4

若定义在$[a,b]$上除了至多有限个第一类间断点的函数f的导函数在$[a,b]$上除了至多有限个点外都存在且连续，在这有限个点上导函数f'的左、右极限存在，则称f在$[a,b]$上按段光滑.

Corollary 15.2

若函数f在$[a,b]$上按段光滑，则有：

(i) f在$[a,b]$上可积；

(ii) $\forall x\in[a,b]$，$\exists f(x\pm 0)$，且$\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}=f'(x+0)$，$\lim\limits_{t\to 0^-}\frac{f(x-t)-f(x-0)}{-t}=f'(x-0)$

(iii) 补充定义f'在$[a,b]$上不存在的点(至多有限个)的值后，f'在$[a,b]$上可积.

Theorem 15.3 (Fourier 级数的收敛定理)

若以2π为周期的函数f在$[-\pi,\pi]$上按段光滑，则$\forall x_0\in[-\pi,\pi]$，f的Fourier级数收敛于f在$x=x_0$处左右极限的算术平均值，即$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

Corollary 15.3

若f是以2π为周期的连续函数，且在$[-\pi,\pi]$上按段光滑，则f的Fourier级数在$\mathbb{R}$上收敛于f.

证 f连续$\Rightarrow\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=f(x)$，结合收敛定理即证.

Definition 15.5

设f是以$2l$为周期的函数，通过变量代换$\frac{\pi x}{l}=t$或$x=\frac{lt}{\pi}$，即可将f变换为以2π为周期的t的函数$F(t)=f(\frac{lt}{\pi})$.

此时易变换得$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$，$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$，$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$

Definition 15.6

设f是定义在$[-l,l]$上的偶函数，则$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$，$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0$，故此时$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$，该级数称作余弦级数.

设f是定义在$[-l,l]$上的奇函数，则$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0$，$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$，故此时$f(x)\sim\sum b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$，该级数称作正弦函数.

一般地，有时需将定义在$[0,l]$上的函数展开成余弦级数或正弦级数，此时可将函数作偶式延拓或奇式延拓至$[-l,l]$上，即可对应展开得到余弦级数或正弦级数.

Theorem 15.4 (Parseval 等式)

设f在$[-\pi,\pi]$上可积，且一致收敛于f，则$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum(a_n^2+b_n^2)$.

证
$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]dx\\
&=\frac{a_0}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx\\
&=\frac{a_0^2}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum[a_nf(x)\cos nx+b_nf(x)\sin nx]dx\\
&=\frac{a_0^2}{2}+\frac{1}{\pi}\sum\int_{-\pi}^{\pi}[a_nf(x)\cos nx+b_nf(x)\sin nx]dx\\
&=\frac{a_0^2}{2}+\frac{1}{\pi}\sum\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\right]\\
&=\frac{a_0^2}{2}+\frac{1}{\pi}\sum(a_n^2\pi+b_n^2\pi)\\
&=\frac{a_0^2}{2}+\sum(a_n^2+b_n^2)
\end{aligned}$$

Chapter XVI

Definition 16.1

一般地，对于任意两个集合 A,B，记 $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,\ y\in B\}$，称作 A 和 B 的直积.

注 矩形点集 $S=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ 常记作 $[a,b]\times[c,d]$.

Definition 16.2

对于点 $A(x_0,y_0)$，

平面点集 $\{(x,y)\mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$ 称作点 A 的 δ 圆邻域；

平面点集 $\{(x,y)\mid |x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\}$ 称作点 A 的 δ 方邻域；

点 A 的 δ 邻域泛指其 δ 圆邻域和 δ 方邻域，记作 $U(A;\delta)$ 或 $U(A)$.

对应地，点 A 的空心邻域为 $\{(x,y)\mid 0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$ 或 $\{(x,y)\mid |x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta,\ (x,y)\neq(x_0,y_0)\}$，记作 $U^\circ(A;\delta)$ 或 $U^\circ(A)$.

Definition 16.3

任意一点 $A\in\mathbb{R}^2$ 与任意一个点集 $E\in\mathbb{R}^2$ 之间必有以下三种关系之一：

(i) 若 $\exists U(A)$ s.t. $U(A)\subseteq E$，则称 A 是 E 的内点. E 的全体内点构成的集合称作 E 的内部.

(ii) 若 $\exists U(A)$ s.t. $U(A)\cap E=\varnothing$，则称 A 是 E 的外点.

(iii) 若 $\forall\delta,\ U(A;\delta)\cap E\neq\varnothing,\ U(A;\delta)\cap E^c\neq\varnothing$，其中 $E^c=\mathbb{R}^2\setminus E$，称作 E 关于全平面的余集，则称 A 是 E 的界点. E 的全体界点称作 E 的边界，记作 ∂E.

注 E 的内点必定属于 E；E 的外点必定不属于 E；E 的界点可能属于 E，也可能不属于 E.

Definition 16.4

对于任意一点 $A\in\mathbb{R}^2$ 与任意一个点集 $E\in\mathbb{R}^2$：

(i) 若 $\forall\delta,\ U^\circ(A)\cap E\neq\varnothing$ 或 $\forall\delta,\ |U(A)\cap E|=+\infty$，则称 A 是 E 的聚点.

(ii) 若 $A\in E$，$\exists\delta$ s.t. $U^\circ(A)\cap E=\varnothing$，则称 A 是 E 的孤立点.

注 聚点可能属于 E，也可能不属于 E.

孤立点一定是界点；内点和非孤立的界点一定是聚点；既不是聚点，又不是孤立点，则必为外点.

Definition 16.5

若 E 中每一点都是 E 的内点，即 $\operatorname{int}E=E$，则称 E 为开集.

若 E 的所有聚点都属于 E，则称 E 为闭集. 特别地，若 E 无聚点，则称 E 为闭集.

注 在一切平面点集中，只有 $\varnothing$ 和 $\mathbb{R}$ 是即开又闭的点集.

Definition 16.6

若非空开集 E 具有连通性，即 E 中任意两点之间都可用一条完全含于 E 的有限折线相连接，则称 E 为开域.

开域连同其边界所成的点集称作闭域.

开域、闭域、开域连同其一部分界点所成的点集称作区域.

Definition 16.7

对于平面点集 E，若 $\exists r>0$ s.t. $E\subseteq U(O;r)$，则称 E 为有界点集，否则为无界点集.

点集 E 的直径 $d(E)=\sup\limits_{P_1,P_2\in E}\rho(P_1,P_2)$，其中 $\rho(P_1,P_2)$ 为 P_1 与 P_2 两点间的距离，当 $P_1=(x_1,y_1)$，$P_2=(x_2,y_2)$ 时，$\rho(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

当且仅当 $d(E)$ 为有限值时，E 为有界点集.

Corollary 16.1（三角形不等式）

对 $\mathbb{R}^2$ 上任意三点 P_1, P_2, P_3，有 $\rho(P_1,P_2) \le \rho(P_1,P_3)+\rho(P_2,P_3)$.

证 容易证明.

Definition 16.8

设 $\{P_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ 为平面点列，$P_0 \in \mathbb{R}^2$ 为一定点. 若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$ s.t. $\forall n>N$，$P_n \in U(P_0;\varepsilon)$，则称 $\{P_n\}$ 收敛于 P_0，记作 $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = P_0$.

也即 $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \rho(P_n,P_0) = 0$.

Theorem 16.1（Cauchy 准则）

$\{P_n\}$ 收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon>0, \exists N>0$ s.t. $\forall n>N, p\in\mathbb{Z}^+$，$\rho(P_n,P_{n+p})<\varepsilon$.

证 $\Rightarrow$) $\forall \varepsilon>0, \exists N>0$ s.t. $\forall n>N, p\in\mathbb{Z}^+$，$\rho(P_n,P_{n+p})<\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_{n+p}| \le \rho(P_n,P_{n+p})<\varepsilon$

由数列的 Cauchy 准则，$\{x_n\}$ 收敛，记 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$.

同理 $\{y_n\}$ 收敛，记 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y_0$

记 $P_0(x_0,y_0)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = P_0$.

$\Leftarrow$) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = P_0$，由三角形不等式得 $\rho(P_n,P_{n+p}) \le \rho(P_n,P_0)+\rho(P_{n+p},P_0)<2\varepsilon$

由 ε 的任意性即证.

Theorem 16.2（闭域套定理）

设 $\{D_n\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭域套，即满足：

(i) $D_{n+1} \subseteq D_n$；(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} d(D_n) = 0$，

则存在唯一的点 $P_0 \in D_n$，$n=1,2,\dots$

证 任取点列 $P_n \in D_n$，$n=1,2,\dots$

$D_{n+p} \subseteq D_n \Rightarrow P_n, P_{n+p} \in D_n \Rightarrow \rho(P_n,P_{n+p}) \le d(D_n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \rho(D_n,D_{n+p}) = 0$

由 Cauchy 准则得，存在 $P_0 \in \mathbb{R}^2$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = P_0$.

D_n 是闭域 $\Rightarrow D_n$ 是闭集

又 P_0 是 D_n 的聚点 $\Rightarrow P_0 \in D_n$，$n=1,2,\dots$

若存在 $P_0' \in D_n$，$n=1,2,\dots$，则 $\rho(P_0,P_0') \le \rho(P_0,P_n)+\rho(P_0',P_n) \le 2d(D_n) \Rightarrow \rho(P_0,P_0')=0$

故 $P_0 = P_0'$，即 P_0 唯一.

注 当 $\{D_n\}$ 为闭集套时结论仍然成立.

Corollary 16.2

设 $\{D_n\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭域套. $\forall \varepsilon>0, \exists N>0$ s.t. $\forall n>N$，$D_n \subseteq U(P_0;\varepsilon)$.

证 由闭域套的性质易证.

Theorem 16.3（聚点定理）

设 $E \subseteq \mathbb{R}^2$ 为有界无限点集，则 E 在 $\mathbb{R}^2$ 中至少有一个聚点.

证 由 $\mathbb{R}$ 上的聚点定理推广可证.

Theorem 16.4（致密性定理）

有界无限点列 $\{P_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ 必存在收敛子列 $\{P_{n_k}\}$.

证：由$\mathbb{R}$上的致密性定理推广可证.

Theorem 16.5（有限覆盖定理）

设$D\subseteq\mathbb{R}^2$为一有界闭域，$\{\Delta_\alpha\}$为一开域族，$D\subseteq\bigcup_\alpha \Delta_\alpha$，则在$\{\Delta_\alpha\}$中必存在有限个开域$\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_n$满足$D\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\Delta_i$.

证：由$\mathbb{R}$上的有限覆盖定理推广可证.

注：更一般地，当D为有界闭集，$\Delta_\alpha\subseteq\mathbb{R}^2$为开集族时，结论仍然成立.

Definition 16.9

设f为定义在$D\subseteq\mathbb{R}^2$上的二元函数，P_0为D的一个聚点，A是一个确定的实数. 若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ s.t. $\forall P\in U^\circ(P_0;\delta)\cap D$，$|f(P)-A|<\varepsilon$，则称$f$在$D$上当$P\to P_0$时以$A$为重极限，也简称极限，记作$\lim\limits_{P\in D,P\to P_0} f(P)=A$，常省略记作$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$.

Theorem 16.6（Heine 原理）

$\lim\limits_{P\in E,P\to P_0} f(P)=A$的充要条件为：对于$D$的任一子集$E$，若$P_0$是$E$的聚点，则$\lim\limits_{P\in E,P\to P_0} f(P)=A$.

证：由$\mathbb{R}$上的 Heine 原理推广可证.

Corollary 16.3

- 设$E_1\subseteq D$，P_0是E_1的聚点. 若$\lim\limits_{P\in E_1,P\to P_0} f(P)$不存在，则$\lim\limits_{P\in D,P\to P_0} f(P)$不存在.
- 设$E_1,E_2\subseteq D$，P_0是E_1,E_2的聚点. 若存在极限$\lim\limits_{P\in E_1,P\to P_0} f(P)=A_1$，$\lim\limits_{P\in E_2,P\to P_0} f(P)=A_2$，$A_1\neq A_2$，则$\lim\limits_{P\in D,P\to P_0} f(P)$不存在.
- 极限$\lim\limits_{P\in D,P\to P_0} f(P)$存在的充要条件是：对于$D$中任一满足$P_n\neq P_0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}P_n=P_0$的点列$\{P_n\}$，$\{f(P_n)\}$都收敛.

证：均由 Heine 原理易推出

Definition 16.10

设$f(x,y)$，$(x,y)\in D$，D在x轴，y轴上的投影分别为X,Y，即$X=\{x\mid(x,y)\in D\}$，$Y=\{y\mid(x,y)\in D\}$，x_0,y_0分别为X,Y的聚点. 若对每一个$y\in Y$，$y\neq y_0$，存在极限$\varphi(y)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$，且存在极限$L=\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)$，则称$L$是$f(x,y)$先对$x$，后对$y$的累次极限，记作$L=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$.

类似可以定义$f(x,y)$先对y，再对x的累次极限$K=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$

Theorem 16.7

若$f(x,y)$在点(x_0,y_0)存在重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$与累次极限$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$，则两个极限必相等.

证：设$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ s.t. $\forall P\in U^\circ(P_0;\delta)$，$|f(x,y)-A|<\varepsilon$

又$\forall x\in U^\circ(x_0;\delta')$，$\exists\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\varphi(x)\Rightarrow\forall y\in U^\circ(y_0;\delta')$，由$\delta'$的任意性，有$|\varphi(x)-A|\leq\varepsilon$

故$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=A$，即证.

注：显然对累次极限$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$也适用

该定理只保证了当重极限和一个累次极限都存在时，两个极限必相等. 但对另一个累次极限是否存在不能得出结论.

Corollary 16.4

- 若累次极限$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$，$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$和重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$都存在，则三个极限必相等.
- 若累次极限$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$，$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$存在但不相等，则重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$必不存在.

证：由 Theorem 16.7 易推知.

Definition 16.11

设f为定义在点集$D\subseteq\mathbb{R}^2$上的二元函数，$P_0\in D$. $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ s.t. $\forall P\in U(P_0;\delta)\cap D$，$|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon$，则称$f$关于集合$D$在点$P_0$处连续.

若 f 在 D 上任何点都关于集合 D 连续，则称 f 是 D 上的连续函数.

Corollary 16.5

若 P_0 是 D 的孤立点，则 P_0 必定是 f 关于 D 的连续点；若 P_0 是 D 的聚点，则 f 关于 D 在 P_0 连续等价于 $\lim\limits_{P\in D, P\to P_0} f(P)=f(P_0)$.

证 由定义易推知.

Definition 16.12

若 P_0 是 D 的聚点，而 $\lim\limits_{P\in D, P\to P_0} f(P)=f(P_0)$ 不成立，则称 P_0 是 f 的间断点. 当 $\lim\limits_{P\in D, P\to P_0} f(P)$ 存在，但不等于 $f(P_0)$ 时，称 P_0 是 f 的可去间断点.

Definition 16.13

设 $P_0(x_0,y_0)$, $P(x,y)\in D$, $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$，则称 $\Delta z=\Delta f(x_0,y_0)=f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 为 f 在点 P_0 的全增量.

若在全增量中取 $\Delta x=0$ 或 $\Delta y=0$，则相应的函数增量称作偏增量，记作 $\Delta_x f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$, $\Delta_y f(x_0,y_0)=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$.

注 一般地，函数的全增量不等于两个偏增量之和.

Corollary 16.6

若 $\lim\limits_{(x,y)\in D, (\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta z=0$，则 f 在 $P(x_0,y_0)$ 处连续.

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta_x f(x_0,y_0)=0$，则 $f(x,y_0)$ 作为 x 的一元函数在 $x=x_0$ 处连续；若 $\lim\limits_{\Delta y\to 0} \Delta_y f(x_0,y_0)=0$，则 $f(x_0,y)$ 作为 y 的一元函数在 $y=y_0$ 处连续.

证 由定义易推知.

注 一般地，二元函数对单个自变量都连续不能保证函数的连续性.

Theorem 16.8（复合函数的连续性）

设函数 $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ 在 xy 平面上点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，并在点 P_0 连续；函数 $f(u,v)$ 在 uv 平面上点 $Q_0(u_0,v_0)$ 的某邻域内有定义，并在点 Q_0 连续，其中 $u_0=\varphi(x_0,y_0)$, $v_0=\psi(x_0,y_0)$，则复合函数 $g(x,y)=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 P_0 也连续.

证 f 在 Q_0 连续 $\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\eta>0$ s.t. $\forall |u-u_0|<\eta, |v-v_0|<\eta, |f(u,v)-f(u_0,v_0)|<\varepsilon$

φ,ψ 在 P_0 连续 $\Rightarrow \exists\delta>0$ s.t. $\forall |x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta$, $|u-u_0|=|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)|<\eta$, $|v-v_0|=|\psi(x,y)-\psi(x_0,y_0)|<\eta$

$\Rightarrow |g(x,y)-g(x_0,y_0)|=|f(u,v)-f(u_0,v_0)|<\varepsilon$

$\Rightarrow f$ 在 P_0 连续

Theorem 16.9（有界性与最大、最小值定理）

若函数 f 在有界闭域 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 上连续，则 f 在 D 上有界，且能取得最大值与最小值.

证 假设 f 在 D 上无界，则 $\forall n\in\mathbb{N}^+$, $\exists P_n\in D$ s.t. $|f(P_n)|>n$, $n=1,2,\ldots$

则 $\{P_n\}\subseteq D$. 由致密性定理得，$\{P_n\}$ 存在收敛子列 $\{P_{n_k}\}$，设 $\lim\limits_{k\to\infty} P_{n_k}=P_0$. 又 D 为闭域，故 $P_0\in D$.

f 在 D 上连续 $\Rightarrow f$ 在 P_0 处连续 $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(P_{n_k})=f(P_0)$，与 $|f(P_n)|>n$ 矛盾！

故 f 在 D 上有界

设 $M=\sup f(D)$

假设 $\forall P\in D$, $f(P)<M$

令 $F(P)=\dfrac{1}{M-f(P)}$

F 在 D 上有界 $\Rightarrow$ 存在收敛点列 $\{P_n\}\subseteq D$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n)=M$.

则 $\lim\limits_{n\to+\infty} F(P)=+\infty$. 与 F 在 D 上有界矛盾!

故 $\exists P_1\in D$ s.t. $f(P_1)=M$

同理 $\exists P_2\in D$ s.t. $f(P_2)=m$

Theorem 16.10 (一致连续性定理)

若函数 f 在有界闭域 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 上连续, 则 f 在 D 上一致连续, 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ s.t. $\forall\rho(P,Q)<\delta$, $|f(P)-f(Q)|<\varepsilon$.

证 假设 f 在 D 上连续而不一致连续, 则 $\exists\varepsilon_0>0$ s.t. $\forall\delta>0$, $\exists\rho(P,Q)<\delta$, $|f(P)-f(Q)|\geq\varepsilon_0$

令 $\delta=1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\dots$, 则 $\exists\{P_n\},\{Q_n\}\subseteq D$ s.t. $\rho(P_n,Q_n)<\frac{1}{n}$, $|f(P_n)-f(Q_n)|\geq\varepsilon_0$

D 为有界闭域 $\Rightarrow$ 存在收敛子列 $\{P_{n_k}\}\subseteq\{P_n\}$, 设 $\lim\limits_{k\to+\infty}P_{n_k}=P_0\in D$.

则 $0\leq\rho(P_{n_k},Q_{n_k})<\frac{1}{n_k}\to0$, $k\to+\infty\Rightarrow\lim\limits_{k\to+\infty}P_{n_k}=\lim\limits_{k\to+\infty}Q_{n_k}=P_0$

f 在 P_0 连续 $\Rightarrow\lim\limits_{k\to+\infty}|f(P_{n_k})-f(Q_{n_k})|=|f(P_0)-f(P_0)|=0$, 与 $|f(P_{n_k})-f(Q_{n_k})|\geq\varepsilon_0>0$ 矛盾!

故 f 在 D 上一致连续.

Theorem 16.11 (介值性定理)

设函数 f 在区域 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 上连续, 若 P_1,P_2 为 D 中任意两点, 且 $f(P_1)<f(P_2)$, 则对任意实数 $\mu\in(f(P_1),f(P_2))$, 必存在点 $P_0\in D$ 使得 $f(P_0)=\mu$.

证 由 $\mathbb{R}$ 上的介值性定理推广可证.

Chapter XVII

Definition 17.1

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 上有定义，对于 $U(P_0)$ 中的点 $P(x,y)=(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，若函数 f 在点 P_0 处的全增量 Δz 可表示为 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 A,B 是仅与点 P_0 有关的常数，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$o(\rho)$ 是较 ρ 高阶的无穷小量，则称函数 f 在点 P_0 可微.

在使用上，有时也将全增量记作 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$，其中 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\alpha=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\beta=0$

其中 $A\Delta x+B\Delta y$ 称作函数 f 在点 P_0 的全微分，记作 $dz|_{P_0}=df(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y$. 故 dz 是 Δz 的线性主部.

令 $\Delta y=0$，即得 Δz 关于 x 的偏增量 $\Delta_x z=A\Delta x+\alpha\Delta x$，且有 $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A+\alpha$. 类似可得 Δz 关于 y 的偏增量 $\Delta_y z=B\Delta y+\beta\Delta y$，有 $\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=B+\beta$.

Definition 17.2

设函数 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$. 若 $(x_0,y_0)\in D$，且 $f(x,y_0)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，则当极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在时，称该极限为函数 f 在点 (x_0,y_0) 关于 x 的偏导数，记作 $f_x(x_0,y_0)$ 或 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$. 类似可以定义 f 在点 (x_0,y_0) 关于 y 的偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 或 $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$

若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上每一点 (x,y) 都存在对 x 的偏导数，则有函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上对 x 的偏导函数，记作 $f_x(x,y)$ 或 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$. 类似可以定义 f 对 y 的偏导函数 $f_y(x,y)$ 或 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

注 f 对 x(或 y) 在 (x,y_0) 处偏导数的值即为曲线 $C:\begin{cases}y=y_0\\ z=f(x,y)\end{cases}$ 在 (x,y_0) 处的切线 T_x 对 x 轴的斜率.

Theorem 17.1（可微的必要条件）

若二元函数 f 在其定义域内一点 (x_0,y_0) 可微，则 f 在该点关于每个自变量的偏导数都存在，且 $df|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$.

又由 $dx=\Delta x$，$dy=\Delta y$ 可知，$dz=f_x(x_0,y_0)dx+f_y(x_0,y_0)dy$.

若函数 f 在区域 D 上每一点 (x,y) 都可微，则称函数 f 在区域 D 上可微. f 在 D 上的全微分为 $df(x,y)=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy$.

注 与一元函数不同，即使关于每个自变量的偏导数都存在，函数也不一定可微.

Theorem 17.2（可微的充分条件）

若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数在点 (x_0,y_0) 的某邻域内存在，且 f_x,f_y 在点 (x_0,y_0) 连续，则函数 f 在点 (x_0,y_0) 可微.

证 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]$.

由 Lagrange 中值定理得，$\exists\theta_1,\theta_2\in(0,1)$ s.t. $\Delta z=f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y$.

又 f_x,f_y 在点 (x_0,y_0) 连续，故 $f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)=f_x(x_0,y_0)+\alpha$，$f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)=f_y(x_0,y_0)+\beta$，且 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\alpha=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\beta=0$.

故 f 在点 (x_0,y_0) 可微.

注 偏导数连续不是函数可微的必要条件，如函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，其在原点 $(0,0)$ 可微，但 f_x 和 f_y 在 $(0,0)$ 不连续.

Definition 17.3

若 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数 f_x,f_y 连续，则称 f_x,f_y 在点 (x_0,y_0) 连续可微.

Theorem 17.3

设函数 f 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内存在偏导数，若 (x,y) 属于该邻域，则存在 $\xi=x_0+\theta_1(x-x_0)$，$\eta=y_0+\theta_2(y-y_0)$，其中 $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$，使得 $f(x,y)-f(x_0,y_0)=f_x(\xi,y)(x-x_0)+f_y(x_0,\eta)(y-y_0)$.

证 应用Lagrange中值定理即证.

Definition 17.4

设P是曲面S上一点, Π是过点P的一个平面. 曲面S上的动点Q到定点P和平面Π的距离分别为d与h. 若当Q在S上以任何方式趋近于P时, 恒有$\frac{h}{d}\to 0$, 则称平面Π为曲面S在点P处的切平面, P为切点.

Theorem 17.4

曲面$z=f(x,y)$在点$P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$存在不平行于z轴的切平面Π的充要条件是函数f在点$P_0(x_0,y_0)$处可微.

Corollary 17.1

若函数f在点$P(x_0,y_0)$可微, 则曲面$z=f(x,y)$在点$P(x_0,y_0,z_0)$的切平面方程为$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$. 该点处的法线方程为$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$

Definition 17.5

设三元函数f在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某邻域$U(P_0)\subseteq\mathbb{R}^3$有定义, l为从点P_0出发的射线, $P(x,y,z)$为l上且含于$U(P_0)$内的任一点, 以ρ表示P与P_0两点间的距离. 若极限$\lim\limits_{\rho\to0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0^+}\frac{\Delta_l f}{\rho}$存在, 则称此极限为函数f在点$P_0$沿方向$l$的方向导数, 记作$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}$或$f_l(P_0)$

Theorem 17.6

若函数f在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$可微, 则f在点P_0沿任一方向l的方向导数都存在, 且$f_l(P_0)=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma$, 其中$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$为方向$l$的方向余弦.

证 设$P(x,y,z)$为l上任一点, 则$x-x_0=\Delta x=\rho\cos\alpha$, $y-y_0=\Delta y=\rho\cos\beta$, $z-z_0=\Delta z=\rho\cos\gamma$.

f在点P_0可微 $\Rightarrow f(P)-f(P_0)=f_x(P_0)\Delta x+f_y(P_0)\Delta y+f_z(P_0)\Delta z+o(\rho)$

$\Rightarrow \frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma+\frac{o(\rho)}{\rho}$

$\Rightarrow f_l(P_0)=\lim\limits_{\rho\to0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma$

Definition 17.6

若$f(x,y,z)$在$P_0(x_0,y_0,z_0)$存在对所有自变量的偏导数, 则称向量$(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0))$为函数f在点$P_0$的梯度, 记作$\mathrm{grad}\,f=(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0))$. 其长度(或模)为$|\mathrm{grad}\,f|=\sqrt{f_x(P_0)^2+f_y(P_0)^2+f_z(P_0)^2}$

若记l方向上的单位向量为$l_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 则方向导数$f_l(P_0)=\mathrm{grad}\,f(P_0)\cdot l_0=|\mathrm{grad}\,f(P_0)|\cos\theta$, θ为$\mathrm{grad}\,f(P_0)$和$l_0$的夹角.

注 当θ=0时, $f_l(P_0)$取得最大值$|\mathrm{grad}\,f(P_0)|$. 即f在点P_0的梯度方向是f的值增长最快的方向.

Theorem 17.7

若函数$x=\varphi(s,t)$, $y=\psi(s,t)$在点$(s,t)\in D$可微, $z=f(x,y)$在点$(x,y)=(\varphi(s,t),\psi(s,t))$可微, 则复合函数$z=f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$在点$(s,t)$可微. 且z关于s与t的偏导数分别为$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{(s,t)}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)}\left.\frac{\partial x}{\partial s}\right|_{(s,t)}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)}\left.\frac{\partial y}{\partial s}\right|_{(s,t)}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{(s,t)}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)}\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{(s,t)}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)}\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{(s,t)}$.

证 由题设得$\Delta x=\frac{\partial x}{\partial s}\Delta s+\frac{\partial x}{\partial t}\Delta t+\alpha_1\Delta s+\beta_1\Delta t$, $\Delta y=\frac{\partial y}{\partial s}\Delta s+\frac{\partial y}{\partial t}\Delta t+\alpha_2\Delta s+\beta_2\Delta t$, $\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$.

代入有$\Delta z=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\Delta s+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\Delta t+\bar{\alpha}\Delta s+\bar{\beta}\Delta t$, 其中$\bar{\alpha}=\frac{\partial z}{\partial x}\alpha_1+\frac{\partial z}{\partial y}\alpha_2+\frac{\partial x}{\partial s}\alpha+\frac{\partial y}{\partial s}\beta+\alpha\alpha_1+\beta\alpha_2$, $\bar{\beta}=\frac{\partial z}{\partial x}\beta_1+\frac{\partial z}{\partial y}\beta_2+\frac{\partial x}{\partial t}\alpha+\frac{\partial y}{\partial t}\beta+\alpha\beta_1+\beta\beta_2$.

由定义, $\Delta s,\Delta t\to0\Rightarrow\Delta x,\Delta y\to0\Rightarrow\alpha,\beta\to0\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\to0\Rightarrow\bar{\alpha},\bar{\beta}\to0$

故$\Delta z=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\Delta s+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\Delta t$

注 该定理也称作链式法则.

若只是求z关于s或t的偏导数, 则x和y只需有关于s或t的偏导数即可. 但外函数$z=f(x,y)$的可微性是不能省略的.

Corollary 17.2

一般地，若 $f(u_1,\dots,u_m)$ 在点 $(u_1,\dots,u_m)$ 可微，$u_k=g_k(x_1,\dots,x_n)$，$k=1,2,\dots,m$，在点 $(x_1,\dots,x_n)$ 具有关于 x_i，$i=1,2,\dots,n$ 的偏导数，则复合函数 $f(g_1(x_1,\dots,x_n),g_2(x_1,\dots,x_n),\dots,g_m(x_1,\dots,x_n))$ 关于 x_i 的偏导数为 $\frac{\partial f}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}$，$i=1,2,\dots,n$

证：由 Theorem 17.7 推广即证.

Theorem 17.8

若函数 $x=\varphi(s,t)$，$y=\psi(s,t)$ 可微，$z=f(x,y)$ 可微，则 $z=f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 的全微分为 $dz=\frac{\partial z}{\partial s}ds+\frac{\partial z}{\partial t}dt=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)dt$ $=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt\right)$.

证：代入 $dx=\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt$，$dy=\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt$ 即证.

注 这一结果称作关于多元函数的一阶全微分形式不变性.

Defition 17.7

对于二元函数 $z=f(x,y)$，其二阶偏导数有如下四种情形：

- $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)$
- $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{xy}(x,y)$
- $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{yx}(x,y)$
- $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$

其中形如 f_{xy}，f_{yx} 这样，关于多个自变量的高阶偏导数称作混合偏导数.

注 类似可以定义更多元、更高阶的偏导数.

Theorem 17.9

若 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$ 都在 (x_0,y_0) 连续，则 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$

证 令 $F(\Delta x,\Delta y)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)$，$\varphi(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)$

则 $F(\Delta x,\Delta y)=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)$

由 Lagrange 中值定理得，$\exists\theta_1\in(0,1)$ s.t. $\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x=[f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)]\Delta x$

由 Lagrange 中值定理得，$\exists\theta_2\in(0,1)$ s.t. $\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y$

即 $F(\Delta x,\Delta y)=f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y$

同理 令 $\psi(y)=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)$，则 $\exists\theta_3,\theta_4\in(0,1)$ s.t. $F(\Delta x,\Delta y)=f_{yx}(x_0+\theta_3\Delta x,y_0+\theta_4\Delta y)\Delta x\Delta y$

故 $f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y=f_{yx}(x_0+\theta_3\Delta x,y_0+\theta_4\Delta y)\Delta x\Delta y$

当 $\Delta x\to0$，$\Delta y\to0$ 时即证.

注 本定理可以推广到 n 元函数的混合偏导数.

Theorem 17.10

设 $z=f(x,y)$，$x=\varphi(s,t)$，$y=\psi(s,t)$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\frac{\partial z}{\partial}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$ $+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}=\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial t}$.

证：
$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}\right)\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$$
$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\frac{\partial z}{\partial}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$$

余下同理

Definition 17.8

若区域 D 上任意两点的连线都含于 D，则称 D 为凸区域.

注 若D为凸区域，则对任意两点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\in D$，$\lambda\in[0,1]$，恒有 $P(x_1+\lambda(x_2-x_1),\ y_1+\lambda(y_2-y_1))\in D$.

Theorem 17.11 (二元函数的中值定理)

设二元函数 f 在凸开域 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 上可微，则对任意两点 $P(a,b),Q(a+h,b+k)\in D$，存在实数 $\theta\in(0,1)$，使得 $f(a+h,b+k)-f(a,b)=f_x(a+\theta h,b+\theta k)h+f_y(a+\theta h,b+\theta k)k$.

证：令 $\Phi(t)=f(a+th,\ b+tk)$.

由Lagrange中值定理得，$\exists\theta\in(0,1)$ s.t. $\Phi(1)-\Phi(0)=\Phi'(\theta)$

又 $\Phi(0)=f(a,b)$，$\Phi(1)=f(a+h,b+k)$，$\Phi'(\theta)=f_x(a+\theta h,b+\theta k)h+f_y(a+\theta h,b+\theta k)k$

即证

Corollary 17.3

若函数 f 在区域D上存在偏导数，且 $f_x=f_y=0$，则 f 在区域D上为常量函数.

证：由中值定理易推知.

Theorem 17.12 (Taylor公式)

若函数 f 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 上有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数，则对 $U(P_0)$ 上任一点 $(x_0+h,\ y_0+k)$，存在相应的 $\theta\in(0,1)$，使得 $f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^nf(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1}f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)$.

其中，$(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^mf(x_0,y_0)=\sum_{i=0}^{m}C_m^i\frac{\partial^m}{\partial x^i\partial y^{m-i}}f(x_0,y_0)h^ik^{m-i}$.

证：令 $\Phi(t)=f(x_0+th,\ x_0+tk)$.

由Taylor公式得，$\exists\theta\in(0,1)$ s.t. $\Phi(1)=\Phi(0)+\frac{\Phi'(0)}{1!}+\frac{\Phi''(0)}{2!}+\cdots+\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}+\frac{\Phi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$

$\Phi^{(m)}(t)=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^mf(x_0+th,y_0+tk)$

故 $\Phi^{(n)}(0)=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^mf(x_0+y_0)$，$\Phi^{(n+1)}(\theta)=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1}f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)$

代入即得.

Definition 17.9

设函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 上有定义. 若对于任何点 $P(x,y)\in U(P_0)$，有 $f(P)\le f(P_0)$，则称 f 在点 P_0 取得极大值. 点 P_0 称作 f 的极大值点.

类似可定义极小值和极小值点.

Theorem 17.13 (极值必要条件)

若函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 存在偏导数，且在 P_0 取得极值，则有 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$.

注 若 f 在点 P_0 处满足 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$，则称 P_0 为 f 的稳定点. 可以意识到，极值点必为稳定点，但稳定点不一定为极值点.

Definition 17.10

若 f 具有二阶连续偏导数，则记 $H_f(P_0)=\begin{pmatrix}f_{xx}(P_0)&f_{xy}(P_0)\\f_{yx}(P_0)&f_{yy}(P_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{yx}&f_{yy}\end{pmatrix}_{P_0}$，称为 f 在 P_0 的Hesse矩阵.

Theorem 17.14 (极值充分条件)

设二元函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 上具有二阶连续偏导数，且 P_0 是 f 的稳定点，则当 $H_f(P_0)$ 是正定矩阵时，f 在 P_0 取得极小值；当 $H_f(P_0)$ 是负定矩阵时，f 在点 P_0 取得极大值；当 $H_f(P_0)$ 是不定矩阵时，f 在点 P_0 不取极值.

证：由 f 在 P_0 的二阶Taylor公式，并由 $f_x(P_0)=f_y(P_0)=0$，得 $f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(\Delta x,\Delta y)H_f(P_0)(\Delta x,\Delta y)^T+o(\Delta x^2+\Delta y^2)$.

$H_f(P_0)$ 正定 $\Rightarrow\forall(\Delta x,\Delta y)\ne(0,0)$，$Q(\Delta x,\Delta y)=(\Delta x,\Delta y)H_f(P_0)(\Delta x,\Delta y)^T>0$

故 $\exists q>0$ s.t. $\forall(\Delta x,\Delta y)\neq(0,0)$, $Q(\Delta x,\Delta y)\geq 2q(\Delta x^2+\Delta y^2)$

$\Rightarrow f(x,y)-f(x_0,y_0)\geq q(\Delta x^2+\Delta y^2)+o(\Delta x^2+\Delta y^2)=(\Delta x^2+\Delta y^2)(q+o(1))\geq 0$，即 f 在点 (x_0,y_0) 取得极小值

对于负定、不定矩阵类似可证.

Corollary 17.4

根据矩阵有关主子行列式的性质，可得：

若 P_0 是 f 的稳定点，则

(i) 当 $f_{xx}(P_0)>0$, $(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P_0)>0$, f 在点 P_0 取得极小值；

(ii) 当 $f_{xx}(P_0)<0$, $(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P_0)>0$, f 在点 P_0 取得极大值；

(iii) 当 $(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P_0)<0$, f 在点 P_0 不取极值；

(iv) 当 $(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P_0)=0$, 不能判断 f 在 P_0 是否取极值.

Chapter XVIII

Definition 18.1

设 $E\subseteq\mathbb{R}^2$，函数 $F:E\to\mathbb{R}$。对于方程 $F(x,y)=0$，如果存在集合 $I,J\subseteq\mathbb{R}$，对任何 $x\in I$，有唯一确定的 $y\in J$ 使得 $(x,y)\in E$，且满足方程 $F(x,y)=0$，则称 $F(x,y)=0$ 确定了一个定义在 I 上，值域含于 J 的隐函数。

注 并不是任一方程都能确定隐函数；并不是任一隐函数都能有显式表示。

Theorem 18.1（隐函数存在唯一性定理）

若函数 $F(x,y)$ 满足下列条件：

(i) F 在以 $P_0(x_0,y_0)$ 为内点的某一区域 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 上连续；

(ii) $F(x_0,y_0)=0$；

(iii) F 在 D 上存在连续的偏导数 $F_y(x,y)$；

(iv) $F_y(x_0,y_0)\neq 0$.

则

1° 存在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)\subseteq D$，在 $U(P_0)$ 上方程 $F(x,y)=0$ 唯一地决定了一个定义在某区间 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 上的隐函数 $y=f(x)$，使得当 $x\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 时，$(x,f(x))\in U(P_0)$，且 $F(x,f(x))\equiv 0$，$f(x_0)=y_0$；

2° $f(x)$ 在 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 上连续.

注 该定理的条件仅为充分条件.

若将条件 (iii)(iv) 改为 $F_x(x,y)$ 连续且 $F_x(x,y)\neq 0$，则结论改为存在唯一的连续函数 $x=g(y)$.

Theorem 18.2（隐函数可微性定理）

设 $F(x,y)$ 满足 Theorem 18.1 中的条件 (i)~(iv)，且在 D 上存在连续的偏导数 $F_x(x,y)$，则由 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 在其定义域 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 上有连续导函数，且 $f'(x)=-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$.

注 进一步地，对 $f'(x)$ 继续求导，可以得到隐函数的高阶导数，如 $y''=\dfrac{2F_xF_yF_{xy}-F_y^2F_{xx}-F_x^2F_{yy}}{F_y^3}$

Example 18.1（隐函数极值问题）

利用隐函数求导公式，得到求由 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 极值的方法如下：

首先，求 y' 为零的点（驻点）$A(\tilde{x},\tilde{y})$，即方程组 $F(x,y)=0$，$F_x(x,y)=0$ 的解；其次，因在 A 处 $F_x=0$，从而有 $y''|_A=-\dfrac{F_{xx}}{F_y}\Big|_A$，最后根据极值判别的第二充分条件，当 $y''<0$（或 >0）时，隐函数 $y=f(x)$ 在 $\tilde{x}$ 处取得极大值（或极小值）$\tilde{y}$.

Definition 18.2

设有方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$，其中 $F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$ 为定义在 $V\subseteq\mathbb{R}^4$ 上的四元函数。若存在平面区域 $D,E\subseteq\mathbb{R}^2$，对于 D 中每一点 (x,y)，有唯一的 $(u,v)\in E$，使得 $(x,y,u,v)\in V$，且满足方程组，则称由方程组确定了隐函数组 $\begin{cases}u=f(x,y)\\ v=g(x,y)\end{cases}$，$(x,y)\in D$，$(u,v)\in E$，并在 D 上成立恒等式 $\begin{cases}F(x,y,f(x,y),g(x,y))=0\\ G(x,y,f(x,y),g(x,y))=0\end{cases}$，$(x,y)\in D$.

Definition 18.3

对方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 关于 x,y 分别求偏导数，得 $\begin{cases}F_x+F_uu_x+F_vv_x=0\\ G_x+G_uu_x+G_vv_x=0\end{cases}$，$\begin{cases}F_y+F_uu_y+F_vv_y=0\\ G_y+G_uu_y+G_vv_y=0\end{cases}$。$u_x,v_x,u_y,v_y$ 可解的充分条件是其系数行列式不为零，即 $\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}\neq 0$.

称 $\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$ 为函数 F,G 关于变量 u,v 的函数行列式，或 Jacob 行列式，亦可记作 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$.

Theorem 18.3 (隐函数组定理)

若：

(i) $F(x,y,u,v)$ 与 $G(x,y,u,v)$ 在以点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 为内点的区域 $V\subseteq\mathbb{R}^4$ 上连续；

(ii) $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$, $G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$；

(iii) F,G 在 V 上具有一阶连续偏导数；

(iv) $J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$ 在点 P_0 不等于零.

则：

1° 存在点 P_0 的某一邻域 $U(P_0)\subseteq V$, 在 $U(P_0)$ 上方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 唯一地确定了定义在点 $Q_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域 $U(Q_0)$ 上的两个二元隐函数 $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$, 使得 $u_0=f(x_0,y_0)$, $v_0=g(x_0,v_0)$, 且当 $(x,y)\in U(Q_0)$ 时, $(x,y,f(x,y),g(x,y))\in U(P_0)$, $F(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0$, $G(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0$；

2° $f(x,y)$, $g(x,y)$ 在 $U(Q_0)$ 上连续；

3° $f(x,y)$, $g(x,y)$ 在 $U(Q_0)$ 上有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$

Definition 18.4

对于函数组 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, 若存在函数组 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, 则称后者为前者的反函数组.

Theorem 18.4 (反函数组定理)

设函数组 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 及其一阶偏导数在某区域 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 上连续, 点 $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点, 且 $u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$, $\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}\neq 0$. 则在点 $P_0'(u_0,v_0)$ 的某一邻域 $U(P_0')$ 上存在唯一的一组反函数 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, 且当 $(u,v)\in U(P_0')$ 时, 有 $(x(u,v),y(u,v))\in U(P_0)$, $u\equiv u(x(u,v),y(u,v))$, $v\equiv v(x(u,v),y(u,v))$.

此外, 反函数组 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ 在 $U(P_0')$ 上存在连续的一阶偏导数, 且 $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$, $\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$, $\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$, $\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$.

Corollary 18.1

函数组与其反函数组的雅可比行列式互为倒数, 即 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$.

证：由 Theorem 18.4 易证.

Theorem 18.5 (平面曲线的切线与法线)

平面曲线 $F(x,y)=0$, 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处：

- 切线：$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$
- 法线：$F_y(x_0,y_0)(x-x_0)-F_x(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

Theorem 18.6 (空间曲线的切线与法平面)

空间曲线 L：$x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $\alpha\leq t\leq\beta$, 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处：

- 切线：$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$
- 法平面：$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

空间曲线 L：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$, 在点 P_0 处：

- 切线：$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}}$

· 法平面：$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\Big|_{P_0}(x-x_0)+\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\Big|_{P_0}(y-y_0)+\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\Big|_{P_0}(z-z_0)=0$

Theorem 18.7 （曲面的切平面与法线）

曲面 $F(x,y,z)=0$，在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处：

· 切平面：$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

· 法线：$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

注　由上可知，函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的梯度 $\mathrm{grad}\,F(P)$ 就是等值面 $F(x,y,z)=0$ 在点 P 的法向量 $\vec{n}=(F_x(P),F_y(P),F_z(P))$

Theorem 18.8 （二元函数单约束条件极值）

欲求函数 $z=f(x,y)$ 的极值，其中 (x,y) 受条件 $C:\varphi(x,y)=0$ 限制。

若将 C 看作 (x,y) 所满足的曲线方程，并设 C 上的点 $P_0(x_0,y_0)$ 为 f 在条件 C 下的极值点，且在点 P_0 的某邻域上，$\varphi(x,y)=0$ 能唯一确定可微的隐函数 $y=g(x)$，则 $x=x_0$ 也必定为 $z=f(x,g(x))=h(x)$ 的极值点．故由 f 在 P_0 可微，g 在 x_0 可微，得到 $h'(x_0)=f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)g'(x_0)=0$

当 φ 满足隐函数定理条件时，$g'(x_0)=-\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}$，代入得 $f_x(P_0)\varphi_y(P_0)-f_y(P_0)\varphi_x(P_0)=0$.

在几何意义上，上式表示曲面 $z=f(x,y)$ 的等高线 $f(x,y)=f(P_0)$ 与曲线 C 在 P_0 处具有公共切线．从而存在某一常数 λ_0，使得在 P_0 处满足 $f_x(P_0)+\lambda_0\varphi_x(P_0)=0$，$f_y(P_0)+\lambda_0\varphi_y(P_0)=0$，$\varphi(P_0)=0$.

如果引入辅助变量 λ 和辅助函数 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，则上三式即为 $L_x(x_0,y_0,\lambda_0)=0$，$L_y(x_0,y_0,\lambda_0)=0$，$L_\lambda(x_0,y_0)=0$．则此时原问题就转化为讨论函数 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ 的无条件极值问题．

这种方法称作 Lagrange 乘数法，函数 L 称作 Lagrange 函数，辅助变量 λ 称作 Lagrange 乘数．

Theorem 18.9 （条件极值）

设在条件组 $\varphi_k(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$，$k=1,\dots,m\ (m<n)$ 的限制下，求目标函数 $y=f(x_1,\dots,x_n)$ 的极值，其中 f 与 φ_k 在区域 D 上有连续的一阶偏导数．

若 D 的内点 $P_0(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$ 是上述问题的极值点，且雅可比矩阵 $\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$ 的秩为 m，则存在 m 个常数 $\lambda_1^{(0)},\dots,\lambda_m^{(0)}$，使得 $(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)},\lambda_1^{(0)},\dots,\lambda_m^{(0)})$ 为 Lagrange 函数 $L(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m)=f(x_1,\dots,x_n)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(x_1,\dots,x_n)$ 的稳定点，即 $(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)},\lambda_1^{(0)},\dots,\lambda_m^{(0)})$ 为 $n+m$ 个方程 $L_{x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}=0$，$i=1,\dots,n$，$L_{\lambda_j}=\varphi_j(x_1,\dots,x_n)=0$，$j=1,\dots,n$ 的解．

Chapter XIX

Definition 19.1

设$f(x,y)$为定义在区域$G=\{(x,y)\mid c(x)\le y\le d(x),\ a\le x\le b\}$上的二元函数，其中$c(x)$, $d(x)$为定义在$[a,b]$上的连续函数．若对于$[a,b]$上每一固定的x值，$f(x,y)$作为y的函数在闭区间$[c(x),d(x)]$上可积，则其积分值是x在$[a,b]$上的函数，记作$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)}f(x,y)\,dy$, $x\in[a,b]$，称作定义在$[a,b]$上的含参量x的积分．

Theorem 19.1 (连续性)

设二元函数$f(x,y)$在区域$G=\{(x,y)\mid c(x)\le y\le d(x),\ a\le x\le b\}$上连续，其中$c(x)$, $d(x)$为$[a,b]$上的连续函数，则函数$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)}f(x,y)\,dy$在$[a,b]$上连续．

Theorem 19.2 (可微性)

设$f(x,y)$, $f_x(x,y)$在$R=[a,b]\times[p,q]$上连续，$c(x)$, $d(x)$为定义在$[a,b]$上其值含于$[p,q]$内的可微函数，则函数$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)}f(x,y)\,dy$在$[a,b]$上可微，且$F'(x)=\int_{c(x)}^{d(x)}f_x(x,y)\,dy-f(x,c(x))c'(x)+f(x,d(x))d'(x)$．

Theorem 19.3 (可积性)

若$f(x,y)$在矩形区域$R=[a,b]\times[c,d]$上连续，则$\varphi(x)$和$\psi(x)$分别在$[a,b]$和$[c,d]$上可积，分别记作$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$, $\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$，称作累次积分．

Theorem 19.4

若$f(x,y)$在矩形区域$R=[a,b]\times[c,d]$上连续，则$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$．

Chapter XX

Definition 20.1

设 L 为平面上可求长度的曲线段，$f(x,y)$ 为定义在 L 上的函数. 对曲线 L 作分割 T. 它把 L 分成 n 个可求长度的小曲线段 $L_i\ (i=1,\dots,n)$，L_i 的弧长记为 Δx_i，分割 T 的细度为 $\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta s_i$，在 L_i 上任取一点 $(\xi_i,\eta_i)\ (i=1,\dots,n)$. 若有极限 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i=J$，且 J 的值与分割 T 和点 (ξ_i,η_i) 的取法无关，则称此极限为 $f(x,y)$ 在 L 上的第一型曲线积分，记作 $\int_L f(x,y)ds$.

Theorem 20.1

- 若 $\int_L f_i(x,y)ds$ 存在，c_i 为常数，则 $\int_L \sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i(x,y)ds$ 也存在，且 $\int_L \sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i(x,y)ds=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\int_L f_i(x,y)ds$.
- 若曲线段 L 由曲线 $L_1,\dots,L_n$ 首尾相接而成，且 $\int_{L_i} f(x,y)ds$ 都存在，则 $\int_L f(x,y)ds$ 也存在，且 $\int_L f(x,y)ds=\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{L_i} f(x,y)ds$.
- 若 $\int_L f(x,y)ds$ 与 $\int_L g(x,y)ds$ 都存在，且在 L 上 $f(x,y)\le g(x,y)$，则 $\int_L f(x,y)ds\le\int_L g(x,y)ds$.
- 若 $\int_L f(x,y)ds$ 存在，则 $\int_L |f(x,y)|ds$ 也存在，且 $\left|\int_L f(x,y)ds\right|\le\int_L |f(x,y)|ds$.
- 若 $\int_L f(x,y)ds$ 存在，L 的弧长为 s，则存在常数 c，使得 $\int_L f(x,y)ds=cs$，且 $\inf\limits_L f(x,y)\le c\le\sup\limits_L f(x,y)$

Theorem 20.2

设有光滑曲线 $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t)\end{cases}$，$t\in[\alpha,\beta]$，函数 $f(x,y)$ 为定义在 L 上的连续函数，则 $\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$.

Definition 20.2

设函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 定义在平面有向可求长度曲线 $L:\overset{\frown}{AB}$ 上，对 L 的任一分割 T，它把 L 分成 n 个小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$，其中 $M_0=A$，$M_n=B$. 记各小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的弧长为 Δx_i，分割 T 的细度 $\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$. 又设 T 的分点 M_i 的坐标为 (x_i,y_i)，并记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$.

在每个小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 (ξ_i,η_i). 若极限 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$ 存在且与分割 T 和点 (ξ_i,η_i) 的取法无关，则称此极限为函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 沿有向曲线 L 上的第二型曲线积分，记作 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 或 $\int_L P(x,y)dx+\int_L Q(x,y)dy$.

若 L 为封闭的有向曲线，则记作 $\oint_L Pdx+Qdy$.

Theorem 20.3

- 若 $\int_{AB} Pdx+Qdy$ 存在，则 $\int_{BA} Pdx+Qdy$ 也存在，且 $\int_{BA} Pdx+Qdy=-\int_{AB} Pdx+Qdy$.
- 若 $\int_L P_i dx+Q_i dy$ 存在，则 $\int_L \left(\sum\limits_{i=1}^{n} c_iP_i\right)dx+\left(\sum\limits_{i=1}^{n} c_iQ_i\right)dy$ 也存在，且 $\int_L \left(\sum\limits_{i=1}^{n} c_iP_i\right)dx+\left(\sum\limits_{i=1}^{n} c_iQ_i\right)dy=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\left(\int_L P_i dx+Q_i dy\right)$
- 若有向曲线 L 是由有向曲线 $L_1,\dots,L_n$ 首尾相接而成，且 $\int_{L_i} Pdx+Qdy$ 存在，则 $\int_L Pdx+Qdy$ 也存在，且 $\int_L Pdx+Qdy=\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{L_i} Pdx+Qdy$.

Theorem 20.4

设平面曲线 $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t)\end{cases}$，$t\in[\alpha,\beta]$，其中 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导函数，且 $A=(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$，$B=(\varphi(\beta),\psi(\beta))$. 又设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 为 L 上的连续函数，则 $\int_L P(x,y)dx=\int_\alpha^\beta P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt$，$\int_L Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta Q(\varphi(t),\psi(t))\,dy$，沿 L 从 A 到 B 的第二型曲线积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]dt$.

Theorem 20.5

设 L 为从 A 到 B 的有向光滑曲线，它以弧长 s 为参数，于是 $L:\begin{cases} x=x(s) \\ y=y(s)\end{cases}$，$0\le s\le l$，其中 l 为曲线 L 的全长，且 $A=(x(0),y(0))$，$B=(x(l),y(l))$. 曲线 L 上每一点的切线方向指向弧长增加的一方. 记切线方向 $\vec{t}$ 与 x 轴，y 轴的夹角为 $\langle\vec{t},x\rangle$，$\langle\vec{t},y\rangle$，则在曲线上每一点的切线方向余弦为

$\frac{dx}{ds}=\cos\langle\vec{t},x\rangle$, $\frac{dy}{ds}=\cos\langle\vec{t},y\rangle$.

若$P(x,y)$, $Q(x,y)$为曲线L上的连续函数，则有$\int_L Pdx+Qdy=\int_0^l[P(x(s),y(s))\cos\langle\vec{t},x\rangle+Q(x(s),y(s))\cos\langle\vec{t},y\rangle]ds=\int_L[P(x,y)\cos\langle\vec{t},x\rangle+Q(x,y)\cos\langle\vec{t},y\rangle]ds$.

Chapter XXI

Definition 21.1

设$f(x,y)$是定义在可求面积的有界闭区域D上的函数．J是一个确定的数，若对任意正数ε，总存在某个正数δ，使得对于D的任何分割T，当其细度$\|T\|<\delta$时，属于T的所有积分和都有$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i - J\right|<\varepsilon$，则称$f(x,y)$在$D$上可积，数$J$称为函数$f(x,y)$在$D$上的二重积分，记作$J=\iint_D f(x,y)\,d\sigma$．其中$f(x,y)$称作二重积分的被积函数，$x,y$称作积分变量，$D$称作积分区域．

Definition 21.2

设函数$f(x,y)$在D上有界，T为D的一个分割，它把D分成n个可求面积的小区域$\sigma_1,\dots,\sigma_n$．令$M_i=\sup\limits_{(x,y)\in\sigma_i} f(x,y)$，$m_i=\inf\limits_{(x,y)\in\sigma_i} f(x,y)$．作和式$S(T)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\sigma_i$，$s(T)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\sigma_i$，它们分别称作函数$f$关于分割$T$的上和与下和．

Theorem 21.1

$f(x,y)$在D上可积的充要条件为$\lim\limits_{\|T\|\to 0} S(T)=\lim\limits_{\|T\|\to 0} s(T)$．

Theorem 21.2

$f(x,y)$在D上可积的充要条件为$\forall\varepsilon>0$，$\exists T$ s.t. $S(T)-s(T)<\varepsilon$．

Theorem 21.3

有界闭区域D上的连续函数必可积．

Theorem 21.4

设$f(x,y)$在有界闭域D上有界，且其不连续点集E是零面积集，则$f(x,y)$在D上可积．

Theorem 21.5（二重积分的性质）

- 若f在区域D上可积，k为常数，则kf在D上也可积，且$\iint_D kf(x,y)\,d\sigma=k\iint_D f(x,y)\,d\sigma$
- 若f,g在区域D上可积，则$f\pm g$在D上也可积，且$\iint_D (f\pm g)\,d\sigma=\iint_D f\,d\sigma\pm\iint_D g\,d\sigma$
- 若f在D_1,D_2上都可积，且D_1,D_2无公共内点，则f在$D_1\cup D_2$上也可积，且$\iint_{D_1\cup D_2} f\,d\sigma=\iint_{D_1} f\,d\sigma+\iint_{D_2} f\,d\sigma$
- 若f,g在D上可积，且$f(x,y)\le g(x,y)$，$(x,y)\in D$，则$\iint_D f(x,y)\,d\sigma\le\iint_D g(x,y)\,d\sigma$
- 若f在D上可积，则$|f|$在D上也可积，且$\left|\iint_D f(x,y)\,d\sigma\right|\le\iint_D |f(x,y)|\,d\sigma$
- 若f在D上可积，且$m\le f(x,y)\le M$，$(x,y)\in D$，则$mS_D\le\iint_D f(x,y)\,d\sigma\le MS_D$

Theorem 21.6（中值定理）

若$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，则存在$(\xi,\eta)\in D$，使得$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=f(\xi,\eta)S_D$．

Theorem 21.7

设$f(x,y)$在矩形区域$D=[a,b]\times[c,d]$上可积，且对每个$x\in[a,b]$，积分$\int_c^d f(x,y)\,dy$存在，则累次积分$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$也存在，且$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$．

设$f(x,y)$在矩形区域$D=[a,b]\times[c,d]$上可积，且对每个$y\in[c,d]$，积分$\int_a^b f(x,y)\,dx$存在，则累次积分$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$也存在，且$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$．

Theorem 21.8

若$f(x,y)$在矩形区域$D=[a,b]\times[c,d]$上连续，则有$\iint f(x,y)\,d\sigma=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$.

Theorem 21.9

若$f(x,y)$在形如$D=\{(x,y)|y_1(x)\le y\le y_2(x),\ a\le x\le b\}$的$x$型区域上连续，$y_1(x),y_2(x)$在$[a,b]$上连续，则$\iint f(x,y)\,d\sigma=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$.

若$f(x,y)$在形如$D=\{(x,y)|x_1(y)\le x\le x_2(y),\ c\le y\le d\}$的$y$型区域上连续，$x_1(y),x_2(y)$在$[c,d]$上连续，则$\iint f(x,y)\,d\sigma=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$.

Theorem 21.10

设$f(x,y)$在有界闭区域D上可积，变换$T: x=x(u,v),\ y=y(u,v)$将uv平面由按段光滑封闭曲线所围成的闭区域Δ一对一地映成xy平面上的闭区域D，函数$x(u,v),y(u,v)$在Δ内分别具有一阶连续偏导数且它们的函数行列式$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ne 0,\ (u,v)\in\Delta$，则$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_\Delta f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv$.

Corollary 21.1（极坐标变换）

$T:\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，$0\le r<+\infty,\ 0\le\theta\le 2\pi$，由于$J(r,\theta)=r$，故有$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_\Delta f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$.

Theorem 21.11

- 若原点$O\notin D$，且xy平面上射线$\theta=\text{const}$与D的边界至多交于两点，则Δ必可表示成$r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta),\ \alpha\le\theta\le\beta$，于是有$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr$.
- 若xy平面上的圆$r=\text{const}$与D的边界至多交于两点，则Δ必可表示成$\theta_1(r)\le\theta\le\theta_2(r),\ r_1\le r\le r_2$，于是有$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_{r_1}^{r_2} r\,dr\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,d\theta$.
- 若原点为D的内点，D的边界的极坐标方程为$r=r(\theta)$，则Δ可表示成$0\le r\le r(\theta),\ 0\le\theta\le 2\pi$，于是有$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr$.
- 若原点O在D的边界上，则Δ为$0\le r\le r(\theta),\ \alpha\le\theta\le\beta$，于是有$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr$.

Definition 21.3

设$f(x,y,z)$为定义在三维空间可求体积的有界闭区域V上的函数，J是一个确定的数，若对任意正数ε，总存在某一正数δ使得对于V的任意分割T，只要$\|T\|<\delta$，属于分割T的所有积分和都有$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i-J\right|<\varepsilon$，则称$f(x,y,z)$在$V$上可积，数$J$称作函数$f(x,y,z)$在$V$上的三重积分，记作$J=\iiint f(x,y,z)\,dV=\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$，其中$f(x,y,z)$称作被积函数，$x,y,z$称作积分变量，$V$称作积分区域.

Theorem 21.12

- 有界闭区域V上的连续函数必可积
- 如果有界闭区域V上的有界函数$f(x,y,z)$的间断点集中在有限多个零体积的曲面上，则$f(x,y,z)$在V上必可积.

Theorem 21.13

若函数$f(x,y,z)$在长方体$V=[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$上的三重积分存在，且对任意$(x,y)\in D=[a,b]\times[c,d]$，$g(x,y)=\int_e^h f(x,y,z)\,dz$存在，则积分$\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$也存在，且$\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint_D dx\,dy\int_e^h f(x,y,z)\,dz$

注 显然对积分变量x,y也可以得到类似的结果.

Corollary 21.2

若$V=\{(x,y,z)|(x,y)\in D,\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}\subseteq[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$，其中$D$为$V$在$Oxy$平面上的投影，$z_1(x,y),z_2(x,y)$是$D$上的连续函数，函数$f(x,y,z)$在$V$上的三重积分存在，且对任意$(x,y)\in D$，$G(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$也存在，则积分$\iint_D G(x,y)\,dx\,dy$存在，且$\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint_D G(x,y)\,dx\,dy=\iint_D dx\,dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$.

注 显然对积分变量x,y也可以得到类似的结果.

Theorem 21.14

若函数$f(x,y,z)$在长方体$V=[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$上的三重积分存在，且对任何$z\in[e,h]$，二重积分$I(z)=\iint\limits_D f(x,y,z)\,dxdy$存在，其中$D=[a,b]\times[c,d]$，则积分$\int_e^h dz\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$也存在，且$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\int_e^h dz\iint\limits_D f(x,y,z)\,dxdy$.

注 显然对积分变量x,y也可以得到类似的结果.

Corollary 21.3

若$V=[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$，函数$f(x,y,z)$在$V$上的三重积分存在，且对任意固定的$z\in[e,h]$，积分$\varphi(z)=\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy$存在，其中$D_z$是截面$\{(x,y)\mid(x,y,z)\in V\}$，则$\int_e^h\varphi(z)\,dz$存在，且$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\int_e^h\varphi(z)\,dz=\int_e^h dz\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy$.

注 显然对积分变量x,y也可以得到类似的结果.

Theorem 21.15

设变换$T: x=x(u,v,w),\ y=y(u,v,w),\ z=z(u,v,w)$，把$uvw$空间中的区域$V'$一一对应地映射到$xyz$空间中的区域$V$，并设函数$x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)$及它们的一阶偏导数在$V'$内连续，且函数行列式$J(u,v,w)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial x}{\partial w}\\\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial w}\\\frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq0,\ (u,v,w)\in V'$

则有三重积分变换公式：$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,dudvdw$，其中$f(x,y,z)$在$V$上可积.

Corollary 21.4 (柱面坐标变换)

$$T:\begin{cases}x=r\cos\theta, & 0\le r<+\infty,\ 0\le\theta\le2\pi\\ y=r\sin\theta, & 0\le r<+\infty,\ 0\le\theta\le2\pi\\ z=z, & -\infty<z<+\infty\end{cases}$$

由于$J(r,\theta,z)=r$，故有$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{V'} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,r\,drd\theta dz$.

注 用柱面坐标计算三重积分，通常是找出V在xy平面上的投影区域D，即当$V=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),(x,y)\in D\}$时，$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$，其中二重积分部分应用极坐标计算.

Corollary 21.5 (球坐标变换)

$$T:\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi, & 0\le r<+\infty,\ 0\le\theta\le2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$$

由于$J(r,\varphi,\theta)=r^2\sin\varphi$，故有$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{V'} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)\,r^2\sin\varphi\,drd\varphi d\theta$.

在球坐标系下，当区域V'为集合$V'=\{(r,\varphi,\theta)\mid r_1(\varphi,\theta)\le r\le r_2(\varphi,\theta),\ \varphi_1(\theta)\le\varphi\le\varphi_2(\theta),\ \theta_1\le\theta\le\theta_2\}$时，重积分可化为累次积分$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}d\varphi\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)\,r^2\sin\varphi\,dr$.

Theorem 21.16 (曲面面积)

设D为可求面积的平面有界区域，函数$f(x,y)$在D上具有连续的一阶偏导数，曲面S由方程$z=f(x,y),(x,y)\in D$，则其面积$\Delta S=\iint\limits_D\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,dxdy=\iint\limits_D\frac{dxdy}{|\cos\langle\vec{n},\vec{z}\rangle|}$，其中$\langle\vec{n},\vec{z}\rangle$为曲面法向量$\vec{n}$和$z$轴正方向的夹角.

Theorem 21.17 (质心)

设V是密度函数为$\rho(x,y,z)$的空间物体，$\rho(x,y,z)$在V上连续，设其质心坐标为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，则$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)\,dV}{\iiint\limits_V\rho(x,y,z)\,dV}$，$\bar{y}=\frac{\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)\,dV}{\iiint\limits_V\rho(x,y,z)\,dV}$，$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)\,dV}{\iiint\limits_V\rho(x,y,z)\,dV}$.

特别地，当V的密度均匀，即ρ为常数时，有$\bar{x}=\frac{1}{\Delta V}\iiint\limits_V x\,dV$，$\bar{y}=\frac{1}{\Delta V}\iiint\limits_V y\,dV$，$\bar{z}=\frac{1}{\Delta V}\iiint\limits_V z\,dV$.

Theorem 21.18 (转动惯量)

设V是密度函数为$\rho(x,y,z)$的空间物体，$\rho(x,y,z)$在V上连续.

则V对x轴的转动惯量为$J_x=\iiint\limits_V(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dV$，$V$对平面$Oxy$的转动惯量为$J_{xy}=\iiint\limits_V z^2\rho(x,y,z)\,dV$

注 类似可以得到V对其它坐标轴和坐标平面的转动惯量.

Theorem 21.19 (引力)

设V是密度函数为$\rho(x,y,z)$的空间物体，$\rho(x,y,z)$在V上连续. 考察位于V外部，坐标为(ξ,η,ζ)的质量为1的质量P所受V的引力.
若记k为引力系数，$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$，则$F_x=k\iiint\limits_V \frac{x-\xi}{r^3}\rho dV$，$F_y=k\iiint\limits_V \frac{y-\eta}{r^3}\rho dV$，$F_z=k\iiint\limits_V \frac{z-\zeta}{r^3}\rho dV$，$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$.

Theorem 21.20 (Green 公式)

若函数$P(x,y)$，$Q(x,y)$在闭区域D上连续，且有连续的一阶偏导数，则有$\oint_L Pdx+Qdy=\iint\limits_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} d\sigma=\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma$，其中L为区域D的边界曲线，分段光滑，并取正方向.

Corollary 21.6

若L为闭曲域D的边界曲线，则$S_D=\iint\limits_D d\sigma=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$.

证 令$P=-y$，$Q=x$，代入Green公式即证.

Definition 21.4

若平面区域D内任一封闭曲线所围成的区域内只含有D中的点，则称该区域为单连通区域，否则称为复连通区域.

注 直观地说，单连通区域是没有"洞"的区域，复连通区域是有"洞"的区域.

Theorem 21.21

设D是单连通闭区域. 若函数$P(x,y)$，$Q(x,y)$在D内连续，且具有一阶连续偏导数，则以下四个条件等价：

(i) 沿D内任一按段光滑封闭曲线L，有$\oint_L Pdx+Qdy=0$；

(ii) 对D中任一按段光滑曲线L，曲线积分$\int_L Pdx+Qdy$与路线无关，只与L的起点及终点有关；

(iii) $Pdx+Qdy$是D内某一函数$u(x,y)$的全微分，即在D内有$du=Pdx+Qdy$；

(iv) 在D内处处成立$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Corollary 21.7

若函数$P(x,y)$，$Q(x,y)$在D内连续，且具有一阶连续偏导数，则$u(x,y)=\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{A(x_0,y_0)}^{B(x,y)} P(s,t)ds+Q(s,t)dt$满足$du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$. 此时称$u(x,y)$为$Pdx+Qdy$的一个原函数.

特别地，常取折线路径$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(s,y_0)ds+\int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt$或$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(s,y)ds+Q(x_0,t)dt$.

Chapter XXII

Definition 22.1

设S是空间中可求面积的曲面，$f(x,y,z)$为定义在S上的函数。对曲面S作分割T，它把S分成n个小曲面块$S_i\ (i=1,\dots,n)$，以ΔS_i记小曲面块S_i的面积，分割T的细度$\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}\{S_i\text{的直径}\}$，在$S_i$上任取一点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\ (i=1,\dots,n)$。若极限$\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$存在，且与分割$T$及$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$的取法无关，则称此极限为$f(x,y,z)$在$S$上的第一型曲面积分，记作$\iint\limits_S f(x,y,z)dS$.

注 特别地，当$f(x,y,z)=1$时，$\iint\limits_S dS$即为曲面S的面积.

Theorem 22.1

设有光滑曲面$S: z=z(x,y),\ (x,y)\in D$，$f(x,y,z)$为S上的连续函数，则$\iint\limits_S f(x,y,z)dS=\iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$.

Corollary 22.1

对于由参量形式表示的光滑曲面$S: x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v),\ (u,v)\in D$，若$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$不全为零，则在$S$上第一型曲面积分$\iint\limits_S f(x,y,z)dS=\iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv$，其中$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2$，$F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v$，$G=x_v^2+y_v^2+z_v^2$.

Definition 22.2

设P,Q,R为定义在双侧曲面S上的函数，在S所指定的一侧作分割T，其将S分为n个小曲面$S_1,\dots,S_n$，分割T的细度$\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}\{S_i\text{的直径}\}$，以$\Delta S_{i_{yz}},\Delta S_{i_{zx}},\Delta S_{i_{xy}}$分别表示$S_i$在三个坐标面上的投影区域的面积。在各个小曲面$S_i$上任取一点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$，若极限$\lim\limits_{\|T\|\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{yz}}+\lim\limits_{\|T\|\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{zx}}+\lim\limits_{\|T\|\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{xy}}$存在，且与曲面$S$的分割$T$和$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$在$S_i$上的取法无关，则称此极限为函数$P,Q,R$在曲面$S$所指定的一侧上的第二型曲面积分，记作$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=\iint\limits_S P(x,y,z)dydz+\iint\limits_S Q(x,y,z)dzdx+\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy$.

Theorem 22.2

- 若$\iint\limits_S P_idydz+Q_idzdx+R_idxdy,\ i=1,\dots,n$，则有$\iint\limits_S(\sum\limits_{i=1}^{n}c_iP_i)dydz+(\sum\limits_{i=1}^{n}c_iQ_i)dzdx+(\sum\limits_{i=1}^{n}c_iR_i)dxdy=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\iint\limits_S P_idydz+Q_idzdx+R_idxdy$.
- 若曲面S是由两两无公共内点的曲面块$S_1,\dots,S_n$组成，且$\iint\limits_{S_i}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$存在，则有$\iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\sum\limits_{i=1}^{n}\iint\limits_{S_i}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$.

Theorem 22.3

设R是定义在光滑曲面$S: z=z(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}$上的连续函数，以$S$的上侧为正侧，则有$\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))dxdy$.

注 对$\iint\limits_S Pdydz$，$\iint\limits_S Qdzdx$有类似结论.

Theorem 22.4

若光滑曲面S由参量方程给出：$S: x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v),\ (u,v)\in D$，且在$D$上$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$不同时为零，则有$\iint\limits_S Pdydz=\pm\iint\limits_D P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}dudv$，$\iint\limits_S Qdzdx=\pm\iint\limits_D Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}dudv$，$\iint\limits_S Rdxdy=\pm\iint\limits_D R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$。当法向量$\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$与曲面$S$的正侧同向时积分取正号，反之取负号.

Theorem 22.5

设S为光滑曲面，α,β,γ分别为S上法线方向与x轴，y轴，z轴正向的夹角，P,Q,R为S上的连续函数，则$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为正侧法向量，且$\iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$.

证：$\cos\alpha=\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$，$\cos\beta=\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$，$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$，$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$，代入Theorem 22.4中即证.

Theorem 22.6

设P.Q.R是定义在光滑曲面$S: z=z(x,y),\ (x,y)\in D$上的连续函数，以S的上侧为正侧，则$\iint\limits_S P(x,y,z)\,dydz+Q(x,y,z)\,dzdx+R(x,y,z)\,dxdy=\iint\limits_D (P(x,y,z(x,y))(-z_x)+(Q(x,y,z(x,y))(-z_y)+R(x,y,z(x,y))\,dxdy$.

Theorem 22.7 (Gauss公式)

设空间区域V由分片光滑的双侧封闭曲面S围成. 若函数P.Q.R在V上连续，且有一阶连续偏导数，则有$\iiint\limits_V (\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\,dxdydz=\oiint\limits_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$，其中S取外侧.

Corollary 22.2

若空间区域V由分片光滑的双侧封闭曲面S围成，则$\Delta V=\frac{1}{3}\oiint\limits_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy$.

证 令$P=x,\ Q=y,\ R=z$，代入Gauss公式即证.

Theorem 22.8 (Stokes公式)

设光滑曲面S的边界L是按段光滑的连续曲线. 若P.Q.R在S(包含L)上连续，且有一阶偏导数，则$\oint\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint\limits_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\iint\limits_S (\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\,dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\,dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\,dxdy$，其中S的侧与L的方向按右手法则确定.

Definition 22.3

若区域V内任一封闭区域皆可以不经过V以外的点而连续收缩于V内一点，则称该区域为单连通区域，否则为复连通区域.

Theorem 22.9

设$\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$为空间单连通区域. 若函数P.Q.R在$\Omega$上连续，且有一阶连续偏导数，则以下四个条件是等价的:

(i) 对于Ω内任一按段光滑的封闭曲线L，有$\oint\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$;

(ii) 对于Ω内任一按段光滑的曲线L，曲线积分$\int\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz$与路线无关;

(iii) $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$是Ω内某一函数的全微分，即$du=P\,dx+Q\,dy+R\,dz$;

(iv) $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$在$\Omega$内处处成立.