习 题 1.1

1. 设 a 为有理数，x 为无理数. 证明：

(1) $a+x$ 是无理数； (2) 当 $a\neq 0$ 时，ax 是无理数.

2. 试在数轴上表示出下列不等式的解：

(1) $x(x^2-1)>0$； (2) $|x-1|<|x-3|$； (3) $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant\sqrt{3x-2}$.

3. 设 $a,b\in\mathbf{R}$. 证明：若对任何正数 ε，有 $|a-b|<\varepsilon$，则 $a=b$.

4. 设 $x\neq 0$，证明 $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant 2$，并说明其中等号何时成立.

5. 证明：对任何 $x\in\mathbf{R}$，有

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$； (2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$.

并说明等号何时成立.

6. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$（$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数的集合）. 证明

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|.$$

你能说明此不等式的几何意义吗？

---

7. 设 $x>0,b>0,a\neq b$. 证明 $\frac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\frac{a}{b}$ 之间.

8. 设 p 为正整数. 证明：若 p 不是完全平方数，则 $\sqrt{p}$ 是无理数.

9. 设 a,b 为给定实数. 试用不等式符号（不用绝对值符号）表示下列不等式的解：

(1) $|x-a|<|x-b|$； (2) $|x-a|<x-b$； (3) $|x^2-a|<b$.

1.

(1) 设 $a=\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{Z}$, $q\neq 0$

反证：假设 $a+x\in\mathbb{Q}$

记 $a+x=b=\frac{s}{t}$, $s,t\in\mathbb{Z}$, $t\neq 0$

则 $x=b-a=\frac{s}{t}-\frac{p}{q}=\frac{qs-pt}{qt}$

又 $qs-pt,qt\in\mathbb{Z}$, $qt\neq 0$

故 $x\in\mathbb{Q}$，矛盾

即证

(2) 设 $a=\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{Z}$, $p,q\neq 0$

反证：假设 $ax\in\mathbb{Q}$

记 $ax=b=\frac{s}{t}$, $s,t\in\mathbb{Z}$, $s,t\neq 0$

则 $x=\frac{b}{a}=\frac{qs}{pt}$

又 $qs,pt\in\mathbb{Z}$, $pt\neq 0$

故 $x\in\mathbb{Q}$，矛盾

即证

2.

(1) $x(x^2-1)=(x+1)x(x-1)>0 \Rightarrow x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$

(2) $|x-1|<|x-3| \Rightarrow x\in(-\infty,2)$

(3) $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geq\sqrt{3x-2}$, $x\in[1,+\infty)$

当 $x\geq 1$ 时，$x-1<2x-1\Rightarrow LHS<0$

又 $RHS\geq 0$

故无解

3. 不妨设 $a\geq b$

反证：假设 $a\neq b$

记 $a-b=\delta$，则 $|a-b|=\delta$

又 $\forall\varepsilon$, $|a-b|<\varepsilon$. 令 $\varepsilon=\delta$，则有 $|a-b|<\delta$，矛盾

即证

4. 略

5.

(1) 当且仅当 $x\in[1,2]$ 时取等

(2) 当且仅当 $x=2$ 时取等

6. 不妨设 $b \geq c$，则原式 $\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2} \leq b-c$

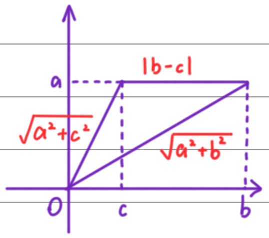
$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} - b \leq \sqrt{a^2+c^2} - c$

记 $f(x) = \sqrt{a^2+x^2} - x$，$x \in \mathbb{R}^+$

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - 1$，$x \in \mathbb{R}^+$

$f'(x) < 0 \Rightarrow f(b) \leq f(c)$．即证

几何意义：三角形两边之差小于第三边



7. 原式 $\Leftrightarrow \left(\frac{a+x}{b+x} - 1\right)\left(\frac{a+x}{b+x} - \frac{a}{b}\right) < 0$

$LHS = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^2 + \frac{a}{b} - \frac{a+x}{b+x} - \frac{(a+x)a}{(b+x)b}$

$= \frac{b(a+x)^2 + a(b+x)^2 - b(a+x)(b+x) - a(a+x)(b+x)}{b(b+x)^2}$

$= \frac{-(a-b)^2 x}{b(b+x)^2}$

< 0

即证

8. 反证：假设 $\exists p \in \mathbb{Z}^+$，当 $\forall a \in \mathbb{Z}$，$p \neq a^2$ 时，$\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$

设 $\sqrt{p} = \frac{s}{t}$，$s,t \in \mathbb{Z}$，$t \neq 0$，$\gcd(s,t) = 1$

则 $p = \frac{s^2}{t^2}$，即 $s^2 = pt^2$．又 $p \in \mathbb{Z}^+$，故 $t^2 | s^2 \Rightarrow t | s$

则 $\gcd(s,t) \geq t$，矛盾

即证

9.

(1) ① $a \leq b \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{a+b}{2}\right)$

② $a > b \Rightarrow x \in \left(\frac{a+b}{2}, +\infty\right)$

(2) ① $a \leq b \Rightarrow x \in \varnothing$

② $a > b \Rightarrow x \in \left(\frac{a+b}{2}, +\infty\right)$

(3) 原式 $\Leftrightarrow -b < x^2 - a < b$

$\Leftrightarrow a-b < x^2 < a+b$

① $a \in (b, +\infty) \Rightarrow x \in (-\sqrt{a+b}, -\sqrt{a-b}) \cup (\sqrt{a-b}, \sqrt{a+b})$

② $a \in (-b, b] \Rightarrow x \in (-\sqrt{a+b}, \sqrt{a+b})$

③ $a \in (-\infty, -b] \Rightarrow x \in \varnothing$

习 题 1.2

1. 用区间表示下列不等式的解：

(1) $|1-x|-x\geqslant 0$； (2) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 6$；

(3) $(x-a)(x-b)(x-c)>0$（a,b,c 为常数，且 $a<b<c$）； (4) $\sin x\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 设 S 为非空数集.试对下列概念给出定义：

(1) S 无上界； (2) S 无界.

3. 试证明由(3)式所确定的数集 S 有上界而无下界.

4. 求下列数集的上、下确界，并依定义加以验证：

(1) $S=\{x\mid x^2<2\}$； (2) $S=\{x\mid x=n!,n\in\mathbf{N}_+\}$；

(3) $S=\{x\mid x$ 为 $(0,1)$ 上的无理数$\}$； (4) $S=\{x\mid x=1-\dfrac{1}{2^n},n\in\mathbf{N}_+\}$.

5. 设 S 为非空有下界数集.证明：

$$\inf S=\xi\in S\Leftrightarrow\xi=\min S.$$

---

6. 设 S 为非空数集，定义 $S^-=\{x\mid -x\in S\}$.证明：

(1) $\inf S^-=-\sup S$； (2) $\sup S^-=-\inf S$.

7. 设 A,B 皆为非空有界数集，定义数集

$$A+B=\{z\mid z=x+y,x\in A,y\in B\}.$$

证明：(1) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$； (2) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

1.

(1) ① $x<1\Rightarrow(1-x)-x\geq 0\Rightarrow x\leq\frac{1}{2}$

② $x\geq 1\Rightarrow(x-1)-x\geq 0\Rightarrow x\in\varnothing$

综上，$x\in(-\infty,\frac{1}{2}]$

(2) $x\in[-3-2\sqrt{2},-3+2\sqrt{2}]\cup[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}]$

(3) $x\in(a,b)\cup(c,+\infty)$

(4) $x\in[\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi]$，$k\in\mathbb{Z}$

2.

(1) $\forall M,\exists a\in S$ s.t. $a>M$

(2) $(\forall M,\exists a\in S$ s.t. $a>M)\wedge(\forall L,\exists a\in S$ s.t. $a<L)$

3.

例如，对于正整数集 $\mathbf{N}_+$，有 $\inf\mathbf{N}_+=1$，$\sup\mathbf{N}_+=+\infty$；对于数集

$$S=\{y\mid y=2-x^2,x\in\mathbf{R}\},\tag{3}$$

有 $\inf S=-\infty$，$\sup S=2$.

先证 S 有上界：

$\forall M\geq 2$，$y=2-x^2\leq 2\leq M$，即 $\forall y\in S$，$y\leq M$

再证 S 无下界：

$\forall L\geq 2$，令 $x=1$，对应有 $y|_{x=1}=1<L$

$\forall L<2$，令 $x=\sqrt{3-L}$，对应有 $y|_{x=\sqrt{3-L}}=L-1<L$

综上，$\forall L$，$\exists y\in S$，$y<L$

4.

(1) $\sup S=\sqrt{2}$，$\inf S=-\sqrt{2}$

(2) $\sup S=+\infty$，$\inf S=1$

(3) $\sup S=1$，$\inf S=0$

(4) $\sup S=1$，$\inf S=\frac{1}{2}$

5. $\Rightarrow)$ $(\forall a\in S,a\geq\xi)\wedge(\xi\in S)\Rightarrow\xi=\min S$

$\Leftarrow)$ $(\forall a\in S,a\geq\min S=\xi)\wedge(\forall\beta>\xi$，令 $x_0=\xi$，即有 $\exists x_0=\xi\in S$ s.t. $x_0<\beta)$

6.

(1) 记 $\eta=\sup S$

$\forall x\in S$，$x\leq\eta\Rightarrow\forall x\in S$，$-x\geq-\eta$ 即 $\forall x\in S^-$，$x\geq-\eta$

$\forall\alpha<\eta$，$\exists x_0\in S$ s.t. $x_0>\alpha\Rightarrow\forall\alpha<\eta$，$\exists x_0\in S$ s.t. $-x_0<-\alpha$

即 $\forall\beta>-\eta$，$\exists x_0\in S^-$ s.t. $x_0<\beta$

故 $\inf S^-=-\eta=-\sup S$

(2) 同(1)

7.

(1) 记 $\sup A = a$, $\sup B = b$

$(\forall x \in A, x \le a) \wedge (\forall y \in B, y \le b) \Rightarrow \forall x \in A, y \in B,\ z = x + y \le a + b$

$\forall \alpha < a, \exists x_0 \in A$ s.t. $x_0 > \alpha \Rightarrow \forall \gamma < a+b, \exists x_0 \in A, y_0 \in B$ s.t. $x_0 + y_0 > \left(a - \frac{a+b-\gamma}{2}\right) + \left(b - \frac{a+b-\gamma}{2}\right) = \gamma$

综上, 可得 $\sup\{A+B\} = \sup A + \sup B$

习 题 1.3

1. 试作下列函数的图像:

(1) $y=x^2+1$; (2) $y=(x+1)^2$; (3) $y=1-(x+1)^2$;

(4) $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$; (5) $y=\begin{cases}3x, & |x|>1,\\ x^3, & |x|<1,\\ 3, & |x|=1.\end{cases}$

2. 试比较函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 分别当 $a=2$ 和 $a=\frac{1}{2}$ 时的图像.

3. 根据图 1-4 写出定义在 $[0,1]$ 上的分段函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的解析表示式.

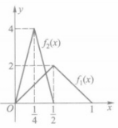


图 1-4

4. 确定下列初等函数的存在域:

(1) $y=\sin(\sin x)$; (2) $y=\lg(\lg x)$;

(3) $y=\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$; (4) $y=\lg\left(\arcsin\frac{x}{10}\right)$.

5. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}2+x, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0.\end{cases}$$

求: (1) $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$; (2) $f(\Delta x)-f(0)$, $f(-\Delta x)-f(0)$ ($\Delta x>0$).

6. 设函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$, 求 $f(2+x)$, $f(2x)$, $f(x^2)$, $f(f(x))$, $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.

7. 试问下列函数是由哪些初等函数复合而成:

(1) $y=(1+x)^{20}$; (2) $y=(\arcsin x^2)^2$;

(3) $y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$; (4) $y=2^{\sin^2 x}$.

8. 在什么条件下, 函数

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

的反函数就是它本身?

9. 试作函数 $y=\arcsin(\sin x)$ 的图像.

10. 试问下列等式是否成立:

(1) $\tan(\arctan x)=x, x\in\mathbf{R}$;

(2) $\arctan(\tan x)=x, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

11. 试问 $y=|x|$ 是初等函数吗?

12. 证明关于函数 $y=[x]$ 的如下不等式:

(1) 当 $x>0$ 时, $1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant 1$;

(2) 当 $x<0$ 时, $1\leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x$.

1. 略

2. 略

3. $f_1(x)=\begin{cases}4x, & x\in[0,\frac{1}{2}]\\ -4x+4, & x\in(\frac{1}{2},1]\end{cases}$

$f_2(x)=\begin{cases}16x, & x\in[0,\frac{1}{4}]\\ -16x+8, & x\in(\frac{1}{4},\frac{1}{2}]\end{cases}$

4. (1) $D=\mathbb{R}$ (2) $D=(1,+\infty)$ (3) $D=[1,100]$ (4) $D=(0,10]$

5. (1) 略

(2) $f(\Delta x)-f(0)=2^{\Delta x}-2$

$f(-\Delta x)-f(0)=(2-\Delta x)-2=-\Delta x$

6. $f(x)=\frac{1}{1+x}$

$f(2+x)=\frac{1}{3+x}$ $f(2x)=\frac{1}{1+2x}$ $f(x^2)=\frac{1}{1+x^2}$

$f(f(x))=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1+x}{2+x}$

$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{1}{1+1+x}=\frac{1}{2+x}$

7. 略

8. $y=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow x=\frac{-dy+b}{cy-a}$

故只需 $a+d=0$ 即可

9. 略

10. (1) 成立 (2) 不成立

11. 不是

12. (1) $\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x}\Rightarrow 1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leq 1$

(2) 同 (1)

习 题 1.4

1. 证明 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的有界函数.

2. (1) 叙述无界函数的定义;

 (2) 证明 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 为 $(0,1)$ 上的无界函数;

 (3) 举出函数 f 的例子,使 f 为闭区间 $[0,1]$ 上的无界函数.

3. 证明下列函数在指定区间上的单调性:

 (1) $y=3x-1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增;

 (2) $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上严格递增;

 (3) $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上严格递减.

4. 判别下列函数的奇偶性:

 (1) $f(x)=\frac{1}{2}x^4+x^2-1$; (2) $f(x)=x+\sin x$;

 (3) $f(x)=x^2e^{-x^2}$; (4) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

5. 求下列函数的周期:

 (1) $\cos^2 x$; (2) $\tan 3x$; (3) $\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{3}$.

6. 设函数 f 定义在 $[-a,a]$ 上,证明:

 (1) $F(x)=f(x)+f(-x)$, $x\in[-a,a]$ 为偶函数;

 (2) $G(x)=f(x)-f(-x)$, $x\in[-a,a]$ 为奇函数;

 (3) f 可表示为某个奇函数与某个偶函数之和.

---

7. 由三角函数的两角和(差)公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha,$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$

推出:

 (1) 和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

 (2) 积化和差公式

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)].$$

8. 设 f,g 为定义在 D 上的有界函数,满足

$$f(x)\leqslant g(x),\ x\in D.$$

证明:(1) $\sup\limits_{x\in D}f(x)\leqslant\sup\limits_{x\in D}g(x)$; (2) $\inf\limits_{x\in D}f(x)\leqslant\inf\limits_{x\in D}g(x)$.

9. 设 f 为定义在 D 上的有界函数,证明:

 (1) $\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\inf\limits_{x\in D}f(x)$; (2) $\inf\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\sup\limits_{x\in D}f(x)$.

10. 证明:$\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上无界,而在任一闭区间 $[a,b]\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上有界.

11. 讨论狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

的有界性、单调性与周期性.

12. 证明:$f(x)=x+\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上严格增.

13. 设定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数 f 在任何闭区间 $[a,b]$ 上有界.定义 $[a,+\infty)$ 上的函数:

$$m(x)=\inf_{a\leqslant y\leqslant x}f(y),\quad M(x)=\sup_{a\leqslant y\leqslant x}f(y).$$

试讨论 $m(x)$ 与 $M(x)$ 的图像,其中

 (1) $f(x)=\cos x$, $x\in[0,+\infty)$; (2) $f(x)=x^2$, $x\in[-1,+\infty)$.

1. $(x-1)^2\geq 0 \Rightarrow x^2+1\geq 2x \Rightarrow \frac{1}{2}\geq\frac{x}{x^2+1}=f(x)$

 同理 $f(x)\geq-\frac{1}{2}$

 即证

2.

(1) $\forall M$, $\exists x\in D$ s.t. $|f(x)|>M$

(2) $\forall M\leq 4$, $f(\frac{1}{2})=4>M$

 $\forall M>4$, $\sqrt{M+1}>\sqrt{5}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{M+1}}\in(0,1)$, 则有 $f(\frac{1}{\sqrt{M+1}})=M+1>M$

 综上,即证

(3) $f(x)=\tan(\pi x)$

3.

(1) 略

(2) 设 $x_1,x_2\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, 不妨设 $x_1<x_2$

 $f(x_2)-f(x_1)=\sin x_2-\sin x_1=2\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\frac{x_2+x_1}{2}$

 $\frac{x_2-x_1}{2}\in(0,\frac{\pi}{2}]\Rightarrow\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$

 $\frac{x_2+x_1}{2}\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\Rightarrow\cos\frac{x_2+x_1}{2}>0$

 故 $f(x_2)-f(x_1)>0$, 即证

(3) 同 (2)

4.

(1) 偶 (2) 奇 (3) 偶 (4) 奇

5.

(1) $\sigma=\pi$ (2) $\sigma=\frac{\pi}{3}$ (3) $\sigma=12\pi$

6.

(1) 略 (2) 略 (3) $f(x)=\frac{1}{2}[F(x)+G(x)]$

7. 略

8.

(1) $\forall a<\sup f(x)$, $\exists x_0$ s.t. $f(x_0)>a$

 故 $g(x_0)\geq f(x_0)>a$

即 $\forall a < \sup f(x)$，$\exists x_0$ s.t. $g(x_0) > a$

故 $\sup f(x) \leq \sup g(x)$

(2) 同 (1)

9.

(1) $f(x) \geq \inf f(x) \Rightarrow -f(x) \leq -\inf f(x)$

$\forall a > \inf f(x)$，$\exists x_0$ s.t. $f(x_0) < a \Rightarrow \forall a < -\inf f(x)$，$\exists x_0$ s.t. $-f(x_0) > a$

$\Rightarrow \sup\{-f(x)\} = -\inf f(x)$

(2) 同 (1)

10.

(1) $\forall M$，$\exists x_0 = \arctan(M+1)$ s.t. $\tan x_0 = M+1 > M$

$\forall L$，$\exists x_0 = \arctan(M-1)$ s.t. $\tan x_0 = M-1 < M$

即证

(2) $\forall x$，$\tan a \leq \tan x \leq \tan b$

即有 $\forall x, |\tan x| \leq \max\{|\tan a|, |\tan b|\}$

11.

有界性：$\forall x, |D(x)| \leq 1$

单调性：无

周期性：$\forall t \in Q$，$D(x+t) = D(x)$

12. 设 $x_1, x_2 \in R$，不妨设 $x_2 > x_1$

$f(x_2) - f(x_1) = x_2 - x_1 + 2\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\frac{x_2+x_1}{2}$

$\sin\frac{x_2-x_1}{2} > \frac{x_1-x_2}{2}$，$\left|\cos\frac{x_2+x_1}{2}\right| \leq 1 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > x_2 - x_1 + 2\cdot\frac{x_1-x_2}{2} = 0$

13. 略

第一章总练习题

1. 设 $a,b\in\mathbf{R}$,证明:

(1) $\max\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$;

(2) $\min\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$.

2. 设 f 和 g 都是 D 上的初等函数.定义

$$M(x)=\max\{f(x),g(x)\},m(x)=\min\{f(x),g(x)\},x\in D.$$

试问 $M(x)$ 和 $m(x)$ 是否为初等函数?

3. 设函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$,求:

$$f(-x),f(x+1),f(x)+1,f\left(\frac{1}{x}\right),\frac{1}{f(x)},f(x^2),f(f(x)).$$

4. 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$,求 $f(x)$.

5. 利用函数 $y=[x]$ 求解:

(1) 某系各班级推选学生代表,每 5 人推选 1 名代表,余额满 3 人可增选 1 名.写出可推选代表数 y 与班级学生数 x 之间的函数关系(假设每班学生数为 30~50 人);

(2) 正数 x 经四舍五入后得整数 y,写出 y 与 x 之间的函数关系.

6. 已知函数 $y=f(x)$ 的图像,试作下列各函数的图像:

(1) $y=-f(x)$; (2) $y=f(-x)$; (3) $y=-f(-x)$;

(4) $y=|f(x)|$; (5) $y=\operatorname{sgn} f(x)$; (6) $y=\frac{1}{2}[|f(x)|+f(x)]$;

(7) $y=\frac{1}{2}[|f(x)|-f(x)]$.

7. 已知函数 f 和 g 的图像,试作下列函数的图像:

(1) $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$; (2) $\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$.

8. 设 f,g 和 h 为增函数,满足

$$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x),x\in\mathbf{R}.$$

证明: $f(f(x))\leqslant g(g(x))\leqslant h(h(x))$.

9. 设 f 和 g 为区间 (a,b) 上的增函数,证明第 7 题中定义的函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 也都是 (a,b) 上的增函数.

10. 设 f 为 $[-a,a]$ 上的奇(偶)函数.证明:若 f 在 $[0,a]$ 上增,则 f 在 $[-a,0]$ 上增(减).

11. 证明:

(1) 两个奇函数之和为奇函数,其积为偶函数;

(2) 两个偶函数之和与积都为偶函数;

(3) 奇函数与偶函数之积为奇函数.

12. 设 f,g 为 D 上的有界函数.证明:

(1) $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\inf\limits_{x\in D}f(x)+\sup\limits_{x\in D}g(x)$;

(2) $\sup\limits_{x\in D}f(x)+\inf\limits_{x\in D}g(x)\leqslant\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$.

13. 设 f,g 为 D 上的非负有界函数.证明:

(1) $\inf\limits_{x\in D}f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D}g(x)\leqslant\inf\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}$;

(2) $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}\leqslant\sup\limits_{x\in D}f(x)\cdot\sup\limits_{x\in D}g(x)$.

14. 将定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 f 延拓到 $\mathbf{R}$ 上,使延拓后的函数为(i)奇函数;(ii)偶函数.设

(1) $f(x)=\sin x+1$;

(2) $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{1-x^2}, & 0<x\leqslant 1,\\ x^3, & x>1.\end{cases}$

15. 设 f 为定义在 $\mathbf{R}$ 上以 h 为周期的函数,a 为实数.证明:若 f 在 $[a,a+h]$ 上有界,则 f 在 $\mathbf{R}$ 上有界.

16. 设 f 在区间 I 上有界.记

$$M=\sup_{x\in I}f(x),\quad m=\inf_{x\in I}f(x).$$

证明

$$\sup_{x',x''\in I}|f(x')-f(x'')|=M-m.$$

17. 设

$$f(x)=\begin{cases}q, & \text{当 } x=\frac{p}{q}\left(p,q\in\mathbf{N}_+,\frac{p}{q}\text{ 为既约真分数},0<p<q\right),\\ 0, & x\text{ 为 }(0,1)\text{ 中的无理数}.\end{cases}$$

证明:对任意 $x_0\in(0,1)$,任意正数 δ,$(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(0,1)$,有 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上无界.

18. 设 $a>0$,m,n,p 为正整数,规定 $a^{\frac{m}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^m$.证明:$a^{\frac{pm}{pn}}=(a^{\frac{1}{pn}})^{pm}=a^{\frac{m}{n}}$.

1. 略

2. 不确定

3. $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$

$f(-x)=\frac{1+x}{1-x}$, $f(x+1)=\frac{-x}{2+x}$, $f(x)+1=\frac{2}{1+x}$, $f(\frac{1}{x})=\frac{x-1}{x+1}$, $\frac{1}{f(x)}=\frac{1+x}{1-x}$, $f(x^2)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $f(f(x))=x$

4. $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$

5.

(1) $y=\left[\frac{x}{5}\right]+\left[\frac{x-5\left[\frac{x}{5}\right]}{3}\right]=\left[\frac{x+2}{5}\right]$

(2) $y=[x+\frac{1}{2}]$

6. 略

7. 略

8. $f(f(x))\leqslant f(g(x))\leqslant g(g(x))$

同理 $g(g(x))\leqslant h(h(x))$

即证

9. 设 x_1,x_2,不妨设 $x_1<x_2$

① $\varphi(x_1)=f(x_1)$, $\varphi(x_2)=f(x_2)$

$\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=f(x_2)-f(x_1)>0$

② $\varphi(x_1)=g(x_1)$, $\varphi(x_2)=g(x_2)$

$\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=g(x_2)-g(x_1)>0$

③ $\varphi(x_1)=f(x_1)$, $\varphi(x_2)=g(x_2)$

$\varphi(x_2)=g(x_2)\geqslant f(x_2)>f(x_1)=\varphi(x_1)$

④ $\varphi(x_1)=g(x_1)$, $\varphi(x_2)=f(x_2)$

$\varphi(x_2)=f(x_2)\geqslant g(x_2)>g(x_1)=\varphi(x_1)$

$\psi(x)$ 同理

综上,即证

10. 略

11.

(1) 设 $f(x)=-f(-x)$, $g(x)=-g(-x)$

$h(x)=f(x)+g(x)=-f(-x)-g(-x)=-h(-x)$

$\varphi(x)=f(x)g(x)=[-f(-x)][-g(-x)]=h(-x)$

(2) 设 $f(x)=f(-x)$, $g(x)=g(-x)$

$h(x)=f(x)+g(x)=f(-x)+g(-x)=h(-x)$

$\varphi(x)=f(x)g(x)=f(-x)g(-x)=\varphi(-x)$

(3) 设 $f(x)=-f(-x)$, $g(x)=g(-x)$

$h(x)=f(x)g(x)=[-f(-x)]g(-x)=-h(-x)$

12.

(1) $\forall x\in D$, $f(x)+g(x)\le \sup\{f(x)+g(x)\}$, $f(x)\ge \inf f(x) \Rightarrow -f(x)\le -\inf f(x)$

故 $[f(x)+g(x)]+[-f(x)]\le \sup\{f(x)+g(x)\}+[-\inf f(x)]$, 即 $g(x)\le \sup\{f(x)+g(x)\}-\inf f(x)$

故 $\sup g(x)\le \sup\{f(x)+g(x)\}-\inf f(x)$

移项即证

(2) 略

13.

(1) $[\forall x\in D, f(x)\ge \inf f(x), g(x)\ge \inf g(x)] \wedge [f(x)\ge 0, g(x)\ge 0]$

$\Rightarrow f(x)\cdot g(x)\ge \inf f(x)\cdot \inf g(x)$

$\Rightarrow \inf f(x)\cdot \inf g(x)\le \inf\{f(x)\cdot g(x)\}$

(2) 略

14.

(1) 奇延拓: $f(x)=\begin{cases} \sin x+1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ \sin x-1, & x<0 \end{cases}$ 偶延拓: $f(x)=\begin{cases} \sin x+1, & x>0 \\ \forall a\in\mathbb{R}, & x=0 \\ \sin(-x)+1, & x<0 \end{cases}$

(2) 奇延拓: $f(x)=\begin{cases} x^3, & x>1 \\ 1-\sqrt{1-x^2}, & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \\ -1+\sqrt{1-x^2}, & x\in[-1,0) \\ x^3, & x<-1 \end{cases}$ 偶延拓: $f(x)=\begin{cases} x^3, & x>1 \\ 1-\sqrt{1-x^2}, & x\in(0,1] \\ \forall a\in\mathbb{R}, & x=0 \\ 1-\sqrt{1-x^2}, & x\in[-1,0) \\ -x^3, & x<-1 \end{cases}$

15. $\forall x\in[a,a+h]$, $\exists D$ s.t. $|f(x)|\le D$

$\Rightarrow \forall x$, $f(x)=f\left(x-h\cdot\left[\frac{x-a}{h}\right]\right)$, 又 $x-h\cdot\left[\frac{x-a}{h}\right]\in[a,a+h]$, 故 $|f(x)|\le D$, 即证

习 题 2.1

1. 设 $a_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$, $n=1,2,\cdots,a=0$.

(1) 对下列 ε 分别求出极限定义中相应的 N:

$$\varepsilon_1=0.1,\quad \varepsilon_2=0.01,\quad \varepsilon_3=0.001;$$

(2) 对 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 可找到相应的 N,这是否证明了 a_n 趋于 0? 应该怎样做才对;

(3) 对给定的 ε 是否只能找到一个 N?

2. 按 $\varepsilon-N$ 定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2n^2-1}=\frac{3}{2}$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0$; (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0\quad(a>1)$.

3. 根据例 2,例 4 和例 5 的结果求出下列极限,并指出哪些是无穷小数列:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2^n}}$; (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{10}$; (7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$.

4. 证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则对任一正整数 k,有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+k}=a$.

5. 试用定义 1′证明:

(1) 数列 $\{\frac{1}{n}\}$ 不以 1 为极限;(2) 数列 $\{n^{(-1)^n}\}$ 发散.

6. 证明定理 2.1,并应用它证明数列 $\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 的极限是 1.

7. 在下列数列中哪些数列是有界数列、无界数列以及无穷大数列:

(1) $\{[1+(-1)^n]\sqrt{n}\}$;(2) $\{\sin n\}$;(3) $\left\{\frac{n^2}{n-\sqrt{5}}\right\}$;(4) $\{2^{(-1)^n n}\}$.

---

8. 证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.当且仅当 a 为何值时反之也成立?

9. 按 $\varepsilon-N$ 定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$,其中

$$a_n=\begin{cases}\frac{n-1}{n}, & n\text{ 为偶数},\\ \frac{\sqrt{n^2+n}}{n}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

10. 设 $a_n\neq0$.证明:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$.

1.

(1) $N_1=20$, $N_2=200$, $N_3=2000$

(2) 不能

(3) 不是

2.

(1) $\forall\varepsilon>0,\ \exists N=[\frac{1}{\varepsilon}]$ s.t. $\forall n>N$, $|a_n-1|=\frac{1}{n}\leq\frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}]+1}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$

(2) $\forall\varepsilon>0,\ \exists N=[\frac{1}{2\varepsilon}]$ s.t. $\forall n>N$, $|a_n-\frac{3}{2}|=\frac{n+\frac{3}{2}}{2n^2-1}<\frac{n}{2n^2}=\frac{1}{2n}\leq\frac{1}{2([\frac{1}{2\varepsilon}]+1)}<\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2\varepsilon}}=\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\frac{3}{2}$

(3) $\frac{n!}{n^n}=\left(\prod\limits_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\frac{k}{n}\right)\left(\prod\limits_{k=[\frac{n}{2}]+1}^{n}\frac{k}{n}\right)\leq(\frac{1}{2})^{[\frac{n}{2}]}\cdot1^{n-[\frac{n}{2}]}=(\frac{1}{2})^{[\frac{n}{2}]}$

记 $b_n=0$. $c_n=(\frac{1}{2})^{[\frac{n}{2}]}$, 则 $c_n\leq a_n\leq b_n$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=0$, 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$

(4) a) $\varepsilon>1$, $N=1$

b) $\varepsilon\in(0,1]$, $N=\left[\frac{\pi}{\arcsin\varepsilon}\right]$

(5) $N=[\varepsilon]\Rightarrow\frac{n}{a^n}<\frac{[\varepsilon]}{a^{[\varepsilon]}}<[\varepsilon]\leq\varepsilon$

3.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$, 是无穷小数列

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3}=1$, 不是

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}=0$, 是

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{3^n}=0$, 是

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2^n}}=0$, 是

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{10}=1$, 不是

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}=1$, 不是

4. $N'=N+k$

5.

(1) 令 $\varepsilon=\frac{1}{2}$. 则 $\forall n>2$, $|\frac{1}{n}-1|>\varepsilon$. 即有无限项不在 $U(1,\varepsilon)$ 外

故不是

(2) 假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$, 令 $\varepsilon=a$

a) 若 $a\geq0$, 则 $\forall n=2k-1,k\in N$, $|a_n-a|>|0-a|=a$, 即有无限项在 $U(a,\varepsilon)$ 外

b) 若 $a<0$，则 $\forall n=2k, k\in N, |a_n-a|>|0-a|=a$，即有无限项在 $U(a,\varepsilon)$ 外

综上，$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq a$，与假设矛盾！

故 $\{a_n\}$ 发散

6. 记 $b_n = a_n - 1 = \frac{(-1)^n}{n}$

$N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$，是无穷小数列

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$

7.

(1) 无界数列

(2) 有界数列

(3) 无穷大数列

(4) 无界数列

8. 当且仅当 $a=0$ 时反之成立

9.

(1) $N=[\frac{1}{4\varepsilon^2}] \Rightarrow \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2}}} = \varepsilon$

(2) $\frac{1+2+\cdots+n}{n^3} = \frac{n+1}{2n^2} < \frac{n+1}{2(n+1)(n-1)} = \frac{1}{2(n-1)}$

$N=[\frac{1}{2\varepsilon}]+1 \Rightarrow \frac{1+2+\cdots+n}{n^3} < \frac{1}{2(n-1)} < \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2\varepsilon}} = \varepsilon$

(3) a) 当 n 是偶数

$N = 2[\frac{1}{\varepsilon}]-1 \Rightarrow \left|\frac{n-1}{n}-1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

b) 当 n 是奇数

$\frac{\sqrt{n^2+n}}{n} - 1 = \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}+n} < \frac{1}{2n}$

$N = 2[\frac{1}{\varepsilon}] \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1\right| < \left|\frac{1}{2n}\right| < \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$

10. $\Rightarrow$) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N\in N$ s.t. $\forall n>N, |a_n-0|<\varepsilon \Leftrightarrow |a_n|<\varepsilon$

$\Rightarrow \forall M, \delta>0$，令 $\varepsilon = \frac{1}{M+\delta}$，则 $\forall n>N, \left|\frac{1}{a_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon} = M+\delta$

$\Leftarrow$) 类似即证

习 题 2.2

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2+1}{4n^3+2n+3}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2n}{n^2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$；

31

42/322

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{10})$；　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$.

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，且 $a<b$. 证明：存在正数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $a_n<b_n$.

3. 设 $\{a_n\}$ 为无穷小数列，$\{b_n\}$ 为有界数列，证明：$\{a_nb_n\}$ 为无穷小数列.

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\dfrac{1}{n}}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$；　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

5. 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 中一个是收敛数列，另一个是发散数列. 证明 $\{a_n\pm b_n\}$ 是发散数列. 又问 $\{a_nb_n\}$ 和 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ $(b_n\neq0)$ 是否必为发散数列？

6. 证明以下数列发散：

(1) $\left\{(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right\}$；　(2) $\{n^{(-1)^n}\}$；　(3) $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{4}\right\}$.

7. 判断以下结论是否成立（若成立，说明理由；若不成立，举出反例）：

(1) 若 $\{a_{2k-1}\}$ 和 $\{a_{2k}\}$ 都收敛，则 $\{a_n\}$ 收敛；

(2) 若 $\{a_{3k-2}\}$，$\{a_{3k-1}\}$ 和 $\{a_{3k}\}$ 都收敛，且有相同极限，则 $\{a_n\}$ 收敛.

8. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{p=1}^{n}p!}{n!}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]$，$0<\alpha<1$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^{2^n})$，$|\alpha|<1$.

9. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为 m 个正数，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

10. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[na_n]}{n}=a$；　　(2) 若 $a>0$，$a_n>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

1.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3+3n^2+1}{4n^3+2n+3}=\dfrac{1}{4}$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2n}{n^2}=0$

(3) $\dfrac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^{n+1}}\leq a_n\leq\dfrac{3^n+2^n}{3^{n+1}-2^{n+1}}$

记 $b_n=\dfrac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^{n+1}}=\dfrac{(\frac{3}{2})^n-1}{3\cdot(\frac{3}{2})^n+2}<\dfrac{1}{3}$

$\left|\dfrac{1}{3}-b_n\right|=\dfrac{5}{9\cdot(\frac{3}{2})^n+6}<\dfrac{5}{9\cdot(\frac{3}{2})^n}$

故 $\forall\varepsilon>0$，令 $N=\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{5}{9\varepsilon}$，则 $\forall n>N$，$\left|\dfrac{1}{3}-b_n\right|<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^{n+1}}=\dfrac{1}{3}$

类似可证得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n+2^n}{3^{n+1}-2^{n+1}}=\dfrac{1}{3}$

综上，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\dfrac{1}{3}$

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=0$

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{10}\sqrt[n]{k}=\sum\limits_{k=1}^{10}\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{k}=10$

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2})^k}{\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{3})^k}=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2})^k}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{3})^k}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$

2. 令 $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}$，则 $\exists N_1$ s.t. $\forall n>N_1$，$|a_n-a|<\varepsilon\Rightarrow a_n<a+\varepsilon=\dfrac{a+b}{2}$，$\exists N_2$ s.t. $\forall n>N_2$，$|b_n-b|<\varepsilon\Rightarrow b_n>b-\varepsilon=\dfrac{a+b}{2}$

故令 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则 $\forall n>N$，$a_n<\dfrac{a+b}{2}<b_n$

3. $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$ s.t. $\forall n>N$，$|a_n|<\varepsilon$

$\exists M$，$\forall n$，$|b_n|\leq M$

$\Rightarrow\forall\varepsilon'>0$，$\exists N$ s.t. $\forall n>N$，$|a_nb_n|\leq|a_n||b_n|<M\varepsilon'$

则 $\forall\varepsilon>0$，令 $\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{M}$，即得 $\exists N$ s.t. $\forall n>N$，$|a_nb_n|<\varepsilon$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}a_nb_n=0$，即证

4.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=1$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+2^{-n}}=2^{\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+2^{-n})}=2^1=2$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{2^k}=2\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^k}-\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}$

$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^k}=\dfrac{2^{n+1}-n-2}{2^n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^k}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^{n+1}-n-2}{2^n}=2$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n}=1$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}=2\times2-1=3$

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(1-\frac{1}{n})}$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(1-\frac{1}{n})=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln(1-\frac{1}{n})=0$

$\Rightarrow$ 原式 $=e^0=1$

(5) 记 $b_n=\frac{1}{n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+1)}$，$c_n=\frac{1}{(n-1)n}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n)}$，则 $b_n\le a_n\le c_n$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n^2+n}=0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\frac{n+1}{2n^2+2n}=0$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$

(6) 记 $b_n=n\cdot\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}$，$c_n=n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2}}$，则 $b_n\le a_n\le c_n$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\frac{n}{n+1}=1$，$\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=1$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$

5.

(1) 不妨设 $\{a_n\}$ 收敛，$\{b_n\}$ 发散

假设 $\{a_n+b_n\}$ 收敛

则 $\{(a_n+b_n)-a_n\}$ 收敛，即 $\{b_n\}$ 收敛，矛盾！

故 $\{a_n+b_n\}$ 发散

同理 $\{a_n-b_n\}$ 发散

(2) 令 $a_n=\frac{1}{n}$，$b_n=n$，则 $a_nb_n=1$，$\{a_nb_n\}$ 收敛，$\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{n^2}$，$\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 收敛

6.

(1) 假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$

① $a\ge0$

令 $\varepsilon=a$，$\forall k\in\mathbb{Z}^+$，$|a_{2k-1}-a|\ge|-\frac{1}{2}-a|=a+\frac{1}{2}>\varepsilon$

即 $U(a,\varepsilon)$ 外有无限项，矛盾！

② $a<0$，与①类似

综上，$\{a_n\}$ 发散

(2) 假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$

① $a\ge1$

令 $\varepsilon=a-1$，$\forall k\in\mathbb{Z}^+$，$|a_{2k+1}-a|\ge|\frac{1}{3}-a|=a-\frac{1}{3}>\varepsilon$

即 $U(a,\varepsilon)$ 外有无限项，矛盾！

② $a<1$，与①类似

综上，$\{a_n\}$ 发散

(3) 假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$

① $a\ge0$

令 $\varepsilon=a$，$\forall k\in\mathbb{Z}^+$，$|a_{8k-4}-a|=|-1-a|=a+1>\varepsilon$

即 $U(a,\varepsilon)$ 外有无限项，矛盾！

② $a<0$，与①类似

综上，$\{a_n\}$ 发散

7.

(1) 不成立，$a_n=(-1)^n$

(2) 成立，下证：

设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{3n-2}=\lim\limits_{n\to+\infty}a_{3n-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}a_{3n}=a$

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1,N_2,N_3$ s.t. $\forall n_1>N_1$，$n_2>N_2$，$n_3>N_3$，$|a_{3n_1-2}-a|$，$|a_{3n_2-1}-a|$，$|a_{3n_3}-a|\in U(a,\varepsilon)$

令 $N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\forall n>N$，$|a_n-a|<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，即 $\{a_n\}$ 收敛

8.

(1) 令 $b_n=0$, $c_n=(\frac{2n-1}{2n})^n$, 则 $b_n\le a_n\le c_n$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}=\sum\limits_{p=1}^{n}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{p!}{n!}=\sum\limits_{p=1}^{n-1}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{p!}{n!}+1=1$

(3) 令 $b_n=0$. $c_n=n^{\alpha-1}$, 则 $b_n\le a_n=n^{\alpha}[(\frac{n+1}{n})^{\alpha}-1]\le n^{\alpha}(\frac{n+1}{n}-1)=n^{\alpha-1}=c_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$

(4) $(1-\alpha)a_n=(1-\alpha)(1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^{2^n})=1-\alpha^{2^{n+1}}\Rightarrow a_n=\frac{1-\alpha^{2^{n+1}}}{1-\alpha}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\frac{1}{1-\alpha}$

9. 不妨设 $a_1=\max\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$

则 $\sqrt[n]{a_1^n}\le\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}\le\sqrt[n]{na_1^n}$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1^n}=a_1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{na_1^n}=(\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n})(\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1^n})=1\cdot a_1=a_1$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}=a_1$, 即证

10.

(1) $\frac{(n-1)[a_n]}{n}\le\frac{[n][a_n]}{n}\le\frac{[na_n]}{n}\le\frac{n[a_n]}{n}$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n-1)[a_n]}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n[a_n]}{n}=[a]$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{[na_n]}{n}=[a]$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1$

习 题 2.3

1. 利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$; (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$.

2. 试问下面的解题方法是否正确:

求 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n$.

解 设 $a_n=2^n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 由于 $a_n=2a_{n-1}$, 两边取极限 $(n\to\infty)$ 得 $a=2a$, 所以 $a=0$.

3. 证明下列数列极限存在并求其值:

(1) 设 $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$, $n=1,2,\cdots$;

(2) 设 $a_1=\sqrt{c}$ $(c>0)$, $a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}$, $n=1,2,\cdots$;

(3) $a_n=\frac{c^n}{n!}$ $(c>0)$, $n=1,2,\cdots$.

4. 利用 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 为递增数列的结论, 证明 $\left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\right\}$ 为递增数列.

5. 应用柯西收敛准则, 证明以下数列 $\{a_n\}$ 收敛:

(1) $a_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$; (2) $a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$.

6. 证明: 若单调数列 $\{a_n\}$ 含有一个收敛子列, 则 $\{a_n\}$ 收敛.

7. 证明: 若 $a_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

8. 证明: 若 $\{a_n\}$ 为递增(递减)有界数列, 则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\sup\{a_n\}\ (\inf\{a_n\}).$$

又问逆命题成立否?

9. 利用不等式

$$b^{n+1}-a^{n+1}>(n+1)a^n(b-a),\ b>a>0,$$

证明: $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 为递减数列, 并由此推出 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 为有界数列.

10. 证明: $\left|e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right|<\frac{3}{n}$.

提示: 利用上题可知 $e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, 又易证 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\frac{3}{n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

11. 给定两正数 a_1 与 $b_1(a_1>b_1)$, 作出其等差中项 $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$ 与等比中项 $b_2=\sqrt{a_1b_1}$, 一般地令

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\ b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\ n=1,2,\cdots.$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 皆存在且相等.

12. 设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 记

$$\bar{a}_n=\sup\{a_n,a_{n+1},\cdots\},\ \underline{a}_n=\inf\{a_n,a_{n+1},\cdots\}.$$

证明: (1) 对任何正整数 n, $\bar{a}_n\geqslant\underline{a}_n$;

(2) $\{\bar{a}_n\}$ 为递减有界数列, $\{\underline{a}_n\}$ 为递增有界数列, 且对任何正整数 n,m, 有 $\bar{a}_n\geqslant\underline{a}_m$;

(3) 设 $\bar{a}$ 和 $\underline{a}$ 分别是 $\{\bar{a}_n\}$ 和 $\{\underline{a}_n\}$ 的极限, 则 $\bar{a}\geqslant\underline{a}$;

(4) $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是 $\bar{a}=\underline{a}$.

1.

(1) 由 Bernoulli Inequality: $(1-\frac{1}{n^2})^n \geq 1+n\cdot(-\frac{1}{n^2}) = 1-\frac{1}{n}$

$1-\frac{1}{n} \leq (1-\frac{1}{n^2})^n \leq 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n^2})^n = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n^2})^n}{\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \left[\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n\right]\left[\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})\right] = e$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n+1})} = e$

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{2n})^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{(1+\frac{1}{2n})^{2n}} = \sqrt{e}$

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}} = 1$

2. 不正确, 因为 2^n 不一定有极限, 不能直接假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n = a$

3.

(1) $a_1 = \sqrt{2} < 2$

假设 $a_k < 2$, 则 $a_{k+1} = \sqrt{2a_k} < \sqrt{2\times 2} = 2$

综上, $a_n < 2$

又 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{a_n}} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

$|a_n| < 2$, $a_{n+1} > a_n \Rightarrow \{a_n\}$ 收敛

$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \Rightarrow a_{n+1}^2 = 2a_n$

设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n = a$, 对上式两边取极限, 得 $a^2 = 2a \Rightarrow a = 0$ 或 2

结合之前分析有 $a_n \geq a_1 = \sqrt{2}$, 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n = 2$

(2) $a_1 = \sqrt{c} < c+1$

假设 $a_k < c+1$, 则 $a_{k+1} = \sqrt{c+a_k} < \sqrt{2c+1} < c+1$

综上, $a_n < c+1$

$a_2 - a_1 = \sqrt{c+a_1} - \sqrt{c} > 0$

假设 $a_{k+1} - a_k > 0$, 则 $a_{k+2} - a_{k+1} = \sqrt{c+a_{k+1}} - \sqrt{c-a_k} > 0$

综上, $a_{n+1} > a_n$

$|a_n| < c+1$, $a_{n+1} > a_n \Rightarrow \{a_n\}$ 收敛

$a_{n+1} = \sqrt{c+a_n} \Rightarrow a_{n+1}^2 = c+a_n$

设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n = a$, 对上式两边取极限, 得 $a^2 = c+a \Rightarrow a = \frac{1\pm\sqrt{1+4c}}{2}$

结合之前分析有 $a_n \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}a_n = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$

(3) $0 \leq \frac{c^n}{n!} \leq (\frac{c}{n})^n$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{c}{n})^n = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{c^n}{n!}=0$

4. $\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n}>1 \Rightarrow \frac{(1+\frac{1}{n+1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n-1}}>\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}>1$

5.

(1) 不妨设 $n>m$，则 $a_n-a_m=\sum\limits_{k=m+1}^{n}\frac{\sin k}{2^k}<\sum\limits_{k=m+1}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{2^{n-m}-1}{2^n}<2^{-m}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N=-\log_2\varepsilon$ s.t. $\forall m,n>N$, $|a_m-a_n|<\varepsilon$

(2) 不妨设 $n>m$，则 $a_n-a_m=\sum\limits_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2}<\sum\limits_{k=m+1}^{n}\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}<\frac{1}{m}$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N=\frac{1}{\varepsilon}$ s.t. $\forall m,n>N$, $|a_m-a_n|<\varepsilon$

6. 设 $\{a_n\}$ 的收敛子列为 $\{a_{n_1},a_{n_2},\dots\}$，$\lim\limits_{k\to+\infty}a_{n_k}=a$

对每一个给定的 ε，$\exists K$ s.t. $\forall k>K$，$|a_{n_k}-a|<\varepsilon$

设 $S_0=\{k|k>K\}$，$k_0=\min S_0$，$S=\{n|n\geq n_{k_0}\}$

① $S\setminus S_0=\varnothing$

则对给定的 ε，$\forall n\geq n_{k_0}$，$|a_n-a|<\varepsilon$

② $S\setminus S_0\neq\varnothing$

设 $S\setminus S_0=S_1$，则 $\forall n\in S_1$，$\exists n_p,n_q\in S_0$ s.t. $n_p<n<n_q \Rightarrow a_{n_p}<a_n<a_{n_q}$

$\Rightarrow |a_{n_p}-a|>|a_n-a|>|a_{n_q}-a|$

又 $|a_{n_p}-a|<\varepsilon$，$|a_{n_q}-a|<\varepsilon \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$

综上，$\forall\varepsilon>0, \exists N$ s.t. $\forall n>N$，$|a_n-a|<\varepsilon$，即证

7. 由保号性可知，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1 \Rightarrow \exists N_0$ s.t. $\forall n>N_0$，$\frac{a_n}{a_{n+1}}>\frac{l+1}{2} \Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k}<\frac{2}{l+1}<1$

记 $M_1=a_1\cdot\left(\prod\limits_{k=1}^{N_0-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)$，$M_2=\prod\limits_{k=N_0}^{n}\frac{a_k}{a_{k+1}}<\prod\limits_{k=N_0}^{n}\frac{2}{l+1}$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=N_0}^{n}\frac{2}{l+1}=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}M_2=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}M_1M_2=0$

8. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$

a) 假设 $\exists a_k>a$，则 $\forall m>k$，$a_m>a_k>a$

又令 $\varepsilon=a_k-a$，则 $\forall m>k$，$a_m\notin U(a,\varepsilon) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}a_n\neq a$，矛盾！

故 $\forall a_n$，$a_n<a$

b) $\forall \alpha<a$，令 $\varepsilon=a-\alpha$，$\exists N$ s.t. $\forall n>N$，$|a_n-a|=a-a_n<\varepsilon \Rightarrow a_n>\alpha$

综上，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\sup\{a_n\}$

逆命题不成立，下证：

令 $a_n=\begin{cases}\frac{1}{2}, & n=1\\ 1, & n=2\\ \frac{1}{n}, & \text{else}\end{cases}$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\inf\{a_n\}=0$

但 $\{a_n\}$ 不是递减有界数列

9. 令 $a=1+\frac{1}{n+1}$，$b=1+\frac{1}{n}$

则 $(1+\frac{1}{n})^{n+1}-(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}>(n+1)(1+\frac{1}{n+1})^n\cdot\frac{1}{n(n+1)}$

$(1+\frac{1}{n})^{n+1}>(1+\frac{1}{n+1})^n\cdot(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n})>(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}$

即证

$(1+\frac{1}{n})^{n+1}>(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}$

$\Leftarrow (\frac{n}{n+1})^{n+1}<(\frac{n+1}{n+2})^{n+2}$

又 $\sqrt[n+2]{(\frac{n}{n+1})^{n+1}}<\frac{(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}+1}{n+2}=\frac{n+1}{n+2}$，即证

又 $a_n\leq a_1=4 \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n})^{n+1}\leq 4$

故 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 有界

10. $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$ 递减，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=e \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^{n+1}>e$

同理 $(1+\frac{1}{n})^n<e \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n<3 \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n\cdot\frac{1}{n}<\frac{3}{n} \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^{n+1}<(1+\frac{1}{n})^n+\frac{3}{n}$

故 $|(1+\frac{1}{n})^n-e|=e-(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n})^{n+1}-(1+\frac{1}{n})^n<\frac{3}{n}$

11. $a_1>b_1$

假设 $a_k > b_k$，则 $\frac{a_k+b_k}{2} > \sqrt{a_k b_k}$，即 $a_{k+1} > b_{k+1}$

综上，$a_n > b_n$

$a_n > b_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} < a_n$ 且 $|a_n| \le a_1$

故 $\{a_n\}$ 收敛

$a_n > b_n \Rightarrow b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} > b_n$ 且 $|b_n| \le a_1$

故 $\{b_n\}$ 收敛

记 $c_n = a_n - b_n$，则 $c_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 < \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}) = \frac{1}{2}(a_n - b_n) = \frac{1}{2}c_n$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n - \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

12. 略

第二章总练习题

1. 求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+3^n}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5}{e^n}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

2. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2q^n=0$ ($|q|<1$)； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n^\alpha}=0$ ($\alpha\geqslant 1$).

3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$（又问由此等式能否反过来推出 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$）；

(2) 若 $a_n>0$ ($n=1,2,\cdots$)，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

4. 应用上题的结论证明下列各题：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=0$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ ($a>0$)；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$； (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$；

(7) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=a$ ($b_n>0$)，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=a$；

(8) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=d$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=d$.

5. 证明：若 $\{a_n\}$ 为递增数列，$\{b_n\}$ 为递减数列，且

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 都存在且相等.

6. 设数列 $\{a_n\}$ 满足：存在正数 M，对一切 n 有

$$A_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|\leqslant M.$$

证明：数列 $\{a_n\}$ 与 $\{A_n\}$ 都收敛.

7. 设 $a>0,\sigma>0,a_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{\sigma}{a}\right),a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{\sigma}{a_n}\right),n=1,2,\cdots$. 证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，且其极限为 $\sqrt{\sigma}$.

8. 设 $a_1>b_1>0$，记

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad b_n=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}},\ n=2,3,\cdots.$$

证明：数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的极限都存在且等于 $\sqrt{a_1b_1}$.

9. 按柯西收敛准则叙述数列 $\{a_n\}$ 发散的充要条件，并用它证明下列数列 $\{a_n\}$ 是发散的：

(1) $a_n=(-1)^n n$； (2) $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$； (3) $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

10. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 记

$$S_n=\max\{a_n,b_n\},T_n=\min\{a_n,b_n\},\ n=1,2,\cdots.$$

证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\max\{a,b\}$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\min\{a,b\}$.

提示：参考第一章总练习题 1.

11. 设 $\{a_n\}$ 是无界数列，$\{b_n\}$ 是无穷大数列. 证明：$\{a_nb_n\}$ 必为无界数列.

12. 倘若 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都是无界数列，试问 $\{a_nb_n\}$ 是否必为无界数列？（若是，需作证明；若否，需给出反例.）

1.

(1) $\forall n\geq 3,\ 3^n\leq 3^n+n^3\leq 2\cdot 3^n \Rightarrow 3\leq\sqrt[n]{3^n+n^3}\leq\sqrt[n]{2\cdot 3^n}$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2\cdot 3^n}=\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2}\right)\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3^n}\right)=3$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3^n+n^3}=3$

(2) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{en}<1\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$

2.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{n+1}{n})^2=q<1\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$

(2) $\frac{\lg n}{n^\alpha}\leq\frac{n}{n^\alpha}=n^{1-\alpha}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}n^{1-\alpha}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\lg n}{n^\alpha}=0$

3.

(1) $\forall\varepsilon>0$，由保号性可知，$\exists N_0$ s.t. $\forall n>N_0$，$a_n\in U(a,\frac{\varepsilon}{2})$

记 $\sum\limits_{k=1}^{N_0}a_k-N_0a=\delta$，则令 $N=\frac{2\delta}{\varepsilon}-N_0$，此时有：

$\sum\limits_{k=1}^{N}a_k-Na=(\sum\limits_{k=1}^{N_0}a_k-N_0a)+\left[\sum\limits_{k=N_0+1}^{N}a_k-(N-N_0)a\right]$

$<\delta+(N-N_0)\cdot\frac{\varepsilon}{2}$

$=N\varepsilon$

即有 $\frac{\sum_{k=1}^{N}a_k}{N}-a<\varepsilon$

综上，$\forall\varepsilon>0,\exists N$ s.t. $\forall n>N,\left|\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}-a\right|<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}=a$

反之不成立，令 $a_n=(-1)^n$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}=0$，但 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\neq 0$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}{n}}=\frac{1}{\frac{1}{a}}=a$

$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}\leq\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}a_k}\leq\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}a_k}=a$

4.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n}=0$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}a^{\frac{1}{n}}=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(a^{\frac{1}{n}})^n}=1$

(3) $a_1=1,\ a_n=\frac{n}{n-1},\ n\geq 2$

$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}=\lim\limits_{n\to+\infty}=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}=e$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n]{n}}-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=e$

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{n}}{n}=1$

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=a \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n-1]{\prod_{k=1}^{n-1}\frac{b_{k+1}}{b_k}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n-1]{b_n\cdot\frac{1}{b_1}}=a$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{b_n\cdot\frac{1}{b_1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n-1]{b_n\cdot\frac{1}{b_1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}=a$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{b_n\cdot\frac{1}{b_1}}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{b_1}}}=a$

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-a_{n-1})=d \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1})}{n-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n-a_1}{n-1}=d$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n-a_1}{n}=\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n-a_1}{n-1}\right)\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n}\right)=d$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n-a_1}{n}\right)+\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_1}{n}\right)=d$

5. 假设 $\exists n_0$ s.t. $a_{n_0}>b_1$，记 $a_{n_0}-b_1=\delta$

$a_{n+1}\geq a_n \Rightarrow \forall n\geq n_0,\ a_n\geq a_{n_0}>b_1$

$b_{n+1}\leq b_n \Rightarrow \forall n,\ b_n\leq b_1$

$\Rightarrow \forall n\geq n_0,\ a_n-b_n\geq a_{n_0}-b_1=\delta$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$，矛盾！

故 $\forall n,\ a_n\leq b_1$，即 b_1 是 $\{a_n\}$ 的上界

又 $\{a_n\}$ 单增 $\Rightarrow \{a_n\}$ 收敛

类似可证 $\{b_n\}$ 收敛

假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\neq\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$，记 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b$，$a\neq b$，不妨设 $a<b$

则 $\exists N_1$ s.t. $\forall n>N_1,\ a_n<a+\frac{b-a}{3}$

$\exists N_2$ s.t. $\forall n>N_2,\ b_n>b-\frac{b-a}{3}$

$\Rightarrow \exists N=\max\{N_1,N_2\},\ \forall n>N,\ a_n-b_n<-\frac{2(b-a)}{3}$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$，矛盾

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$

6. $A_{n+1}=A_n+|a_{n+1}-a_n|\geq A_n$，$A_n\in[0,M]$

$\Rightarrow \{A_n\}$ 收敛

$\Rightarrow \forall\varepsilon,\exists N$ s.t. $\forall m,n>N,\ |A_m-A_n|<\varepsilon$

不妨设 $m\leq n$，则 $|A_m-A_n|=A_n-A_m=\sum_{k=m-1}^{n}|a_{k+1}-a_k|$

又 $\forall p,q$ 满足 $m\leq p\leq q\leq n$，$|a_p-a_q|\leq\sum_{k=p}^{q-1}|a_{k+1}-a_k|\leq\sum_{k=m-1}^{n}|a_{k+1}-a_k|<\varepsilon$

$p,q>N \Rightarrow \forall\varepsilon,\exists N$ s.t. $\forall p,q>N,\ |a_p-a_q|<\varepsilon$

$\Rightarrow \{a_n\}$ 收敛

7. a) $a=\sqrt{\sigma} \Rightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n=\sqrt{\sigma} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\sqrt{\sigma}$

b) $a\neq\sqrt{\sigma} \Rightarrow a_1=\frac{1}{2}(a+\frac{\sigma}{a})>\sqrt{\sigma}$

$\forall n,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{\sigma}{a_n})<\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma}}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma}<\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}a_n=a_n$

且 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{\sigma}{a_n})>\sigma$

故 $\{a_n\}$ 收敛

设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=b$

$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{\sigma}{a_n}) \Rightarrow 2a_{n+1}a_n=a_n^2+\sigma$

两边取极限，得 $2b^2=b^2+\sigma \Rightarrow b=\pm\sqrt{\sigma}$

综上，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\sqrt{\sigma}$

综上，$\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\sqrt{\sigma}$

8. $\forall n,\ a_n>b_n$

$\Rightarrow a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n<\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}a_n=a_n$，$b_{n+1}=\frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}}>\frac{2}{\frac{1}{b_n}+\frac{1}{b_n}}=b_n$

$\Rightarrow a_1>a_n>b_n>b_1$

$\Rightarrow \{a_n\},\{b_n\}$ 均收敛

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$

则对 $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ 两边取极限，得 $a = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a = b$

$\Rightarrow a_{n+1}b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \cdot \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} = a_nb_n = \cdots = a_1b_1$

对两边取极限，得 $ab = a_1b_1 \Rightarrow a = b = \sqrt{a_1b_1}$

9.

(1) $\exists \varepsilon = 1$, $\forall N$, $\exists m = 2N$, $n = 2N+1$ s.t. $|a_m - a_n| = 4N+1 > \varepsilon \Rightarrow \{a_n\}$ 发散

(2) $\exists \varepsilon = 1$, $\forall N$, $\exists m = 4N+1$, $n = 4N+3$ s.t. $|a_m - a_n| = 2 > \varepsilon \Rightarrow \{a_n\}$ 发散

(3) $\exists \varepsilon = \frac{1}{3}$, $\forall N$, $\exists m = 2^{[\log_2 N]+1}$, $n = 2^{[\log_2 N]+2}$ s.t. $|a_m - a_n| = \frac{1}{2} > \varepsilon \Rightarrow \{a_n\}$ 发散

10. $S_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n + |a_n - b_n|)$, $T_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n - |a_n - b_n|)$

两边取极限即证

11. $\exists N_0$ s.t. $\forall n > N_0$, $|b_n| > 1$

$\forall M$, 假设 $\forall m > N_0$, $|a_m| < M$

则 $\forall m$, $|a_m| \le \max\{a_1, a_2, \dots, a_{N_0}, M\}$ ，与 $\{a_n\}$ 为无界数列矛盾!

$\Rightarrow \forall M$, $\exists m > N_0$ s.t. $|a_m| \ge M$ ，此时 $|a_mb_m| = |a_m||b_m| > M$

$\Rightarrow \forall M$, $\exists m$ s.t. $|a_mb_m| > M$

12. 不成立

$a_n = n^{(-1)^n}$ ，$b_n = n^{(-1)^{n+1}} \Rightarrow \{a_n\}, \{b_n\}$ 均无界

$a_nb_n = 1 \Rightarrow \{a_nb_n\}$ 有界

习 题 3.1

1. 按定义证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x+5}{x}=6$； (2) $\lim\limits_{x\to2}(x^2-6x+10)=2$； (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5}{x^2-1}=1$；

(4) $\lim\limits_{x\to2^-}\sqrt{4-x^2}=0$； (5) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

2. 根据定义 2 叙述 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$.

3. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，证明 $\lim\limits_{h\to0}f(x_0+h)=A$.

4. 证明：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$. 当且仅当 A 为何值时反之也成立？

5. 证明定理 3.1.

6. 讨论下列函数在 $x\to0$ 时的极限或左、右极限：

(1) $f(x)=\frac{|x|}{x}$； (2) $f(x)=[x]$； (3) $f(x)=\begin{cases}2^x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ 1+x^2, & x<0.\end{cases}$

7. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，证明 $\lim\limits_{x\to0^+}f\left(\frac{1}{x}\right)=A$.

---

8. 证明：对黎曼函数 $R(x)$ 有 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$，$x_0\in[0,1]$（当 $x_0=0$ 或 1 时，考虑单侧极限）.

1.

(1) $\forall\varepsilon>0,\ \exists M=\frac{5}{\varepsilon}$ s.t. $\forall x>M,\ |f(x)-6|=\frac{5}{x}<\frac{5}{\frac{5}{\varepsilon}}=\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x+5}{x}=6$

(2) $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{3}\}$ s.t. $\forall x\in U^\circ(2,\delta),\ |f(x)-2|=|x-2||x-4|<3\delta\le\varepsilon$

(3) $\forall\varepsilon>0,\ \exists M=\sqrt{\frac{4}{\varepsilon}+1}$ s.t. $\forall|x|>M,\ |f(x)-1|=\frac{4}{x^2-1}<\varepsilon$

(4) $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\frac{\varepsilon^2}{4}$ s.t. $\forall x\in U^\circ_-(2,\delta),\ |f(x)-0|=\sqrt{(2-x)(2+x)}<\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}\cdot4}=\varepsilon$

(5) $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\varepsilon$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0,\delta),\ |f(x)-\cos x_0|=\left|-2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|=2\left|\sin\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|<2\cdot1\cdot\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0|<\varepsilon$

2. $\exists\varepsilon>0,\ \forall\delta,\ \exists x\in U^\circ(x_0,\delta),\ |f(x)-A|\ge\varepsilon$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0,\delta),\ f(x)\in U(A,\varepsilon)$

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta'=\delta$ s.t. $\forall h\in U^\circ(x_0,\delta'),\ f(x_0+h)\in U(A,\varepsilon)\Rightarrow\lim\limits_{h\to0}f(x_0+h)=A$

4. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0,\delta),\ 0<|f(x)-A|<\varepsilon\Rightarrow\big||f(x)|-|A|\big|<|f(x)-A|<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$

当且仅当 $A=0$ 时反之成立，否则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $-A$

5. 略

6.

(1) $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1,\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$

(2) 只需考察 $x\in U^\circ(0,1)$，则 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,1)\\ x+1, & x\in(-1,0)\end{cases}$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\varepsilon$ s.t. $\forall x\in U^\circ_+(0,\delta),\ |f(x)-0|=|x|<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$

类似可得 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$

(3) $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\log_2(1+\varepsilon)$ s.t. $\forall x\in U^\circ_+(0,\delta),\ |f(x)-1|=2^x-1<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\sqrt{\varepsilon}$ s.t. $\forall x\in U^\circ_-(0,\delta),\ |f(x)-1|=x^2<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists M>0$ s.t. $\forall x>M,\ f(x)\in U(A,\delta)$

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\frac{1}{M}$ s.t. $\forall x\in U^\circ_+(0,\delta),\ f(\frac{1}{x})\in U(A,\delta)\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}f(\frac{1}{x})=A$

8. $\forall\varepsilon>0$，$\exists$有限个 x s.t. $D(x)\ge\varepsilon$，记为 $x_1,x_2,\dots,x_n$.

则 $\forall x_0,\ \exists\delta=\min\{|x_1-x_0|,|x_2-x_0|,\dots,|x_n-x_0|\}$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0,\delta),\ D(x)\in U(0,\varepsilon)$

$\Rightarrow\forall x_0,\ \lim\limits_{x\to x_0}D(x)=0$

习 题 3.2

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 2(\sin x-\cos x-x^2)$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; (4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-1)^3+(1-3x)}{x^2+2x^3}$;

(5) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^n-1}{x^m-1}$ (n,m 为正整数); (6) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

(7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{a^2+x}-a}{x}$ ($a>0$); (8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}$.

2. 利用迫敛性求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\cos x}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-4}$.

3. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. 证明:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=AB$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$ (当 $B\neq0$ 时).

4. 设

$$f(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n},\ a_0\neq0, b_0\neq0, m\leqslant n,$$

试求 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5. 设 $f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. 证明

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A},$$

其中 $n\geqslant2$ 为正整数.

6. 证明 $\lim\limits_{x\to0} a^x=1$ ($0<a<1$).

7. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$.

(1) 若在某 $U^\circ(x_0)$ 上有 $f(x)<g(x)$, 问是否必有 $A<B$? 为什么?

(2) 证明: 若 $A>B$, 则在某 $U^\circ(x_0)$ 上有 $f(x)>g(x)$.

---

8. 求下列极限(其中 n 皆为正整数):

(1) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}\frac{1}{1+x^n}$; (2) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}\frac{1}{1+x^n}$;

(3) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)$; (4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}$ (提示: 参照例 1).

9. (1) 证明: 若 $\lim\limits_{x\to0} f(x^3)$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0} f(x^3)$.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to0} f(x^2)$ 存在, 试问是否成立 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0} f(x^2)$?

1.

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 2(\sin x-\cos x-x^2)=2(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}x^2)=2[\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2})^2]=\frac{4-\pi^2}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to0}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to0}(2x^2-x-1)}=\frac{-1}{-1}=1$

(3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x+1)}{\lim\limits_{x\to1}(2x+1)}=\frac{2}{3}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-1)^3+(1-3x)}{x^2+2x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-3}{2x+1}=-3$

(5) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1+x+\cdots+x^{n-1}}{1+x+\cdots+x^{m-1}}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(1+x+\cdots+x^{n-1})}{\lim\limits_{x\to1}(1+x+\cdots+x^{m-1})}=\frac{n}{m}$

(6) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to4}\frac{1+2x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim\limits_{x\to4}\frac{2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim\limits_{x\to4}\frac{2\sqrt{x}+4}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{4}{3}$

(7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{a^2+x}-a}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{a^2+x}+a)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{a^2+x}+a}=\frac{1}{2a}$

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(3+\frac{6}{x})^{70}(8-\frac{5}{x})^{20}}{(5-\frac{1}{x})^{90}}=\frac{3^{70}\cdot8^{20}}{5^{90}}$

2.

(1) $\frac{x+1}{x}\leqslant\frac{x-\cos x}{x}\leqslant\frac{x-1}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x}=1$

(2) 当 $x>2$ 时, $\frac{-x}{x^2-4}\leqslant\frac{x\sin x}{x^2-4}\leqslant\frac{x}{x^2-4}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-4}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-4}=0$

3. 略

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a_0x^m+\cdots+a_m}{b_0x^n+\cdots+b_n}=\frac{a_0+\cdots+a_mx^{-m}}{b_0x^{n-m}+\cdots+b_nx^{-m}}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & m=n\\ 0, & m<n\end{cases}$

5. 由保不等式性得 $A\geqslant0$.

a) $A=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta\ s.t.\ \forall x\in(x_0,\delta), |f(x)-0|<\varepsilon$

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta\ s.t.\ \forall x\in U^\circ(x_0,\delta), |f(x)-0|<\varepsilon^n\Rightarrow|\sqrt{f(x)}-0|<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=0$

b) $A>0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta\ s.t.\ \forall x\in(x_0,\delta), |f(x)-A|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta\ s.t.\ \forall x\in(x_0,\delta), |f(x)-A|<A^{\frac{n-1}{n}}\varepsilon\Rightarrow|\sqrt[n]{f(x)}-A|=\frac{|f(x)-A|}{\left|[f(x)]^{\frac{n-1}{n}}+[f(x)]^{\frac{n-2}{n}}A^{\frac{1}{n}}+\cdots+A^{\frac{n-1}{n}}\right|}<\frac{|f(x)-A|}{A^{\frac{n-1}{n}}}=\varepsilon$

综上, $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}$

6. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\min\{\log_a(1+\varepsilon),-\log_a(1-\varepsilon)\}\ s.t.\ \forall x\in U^\circ(0,\delta), 1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon\Rightarrow|a^x-1|<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}a^x=1$

7.

(1) 不一定, 可能 $A=B$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Rightarrow\exists\delta_1\ s.t.\ \forall x\in U^\circ(x_0,\delta_1), f(x)\in U(A,\frac{A-B}{2})\Rightarrow f(x)>\frac{A+B}{2}$

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B \Rightarrow \exists \delta_2$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0,\delta_2)$, $g(x)\in U(B,\frac{A-B}{2}) \Rightarrow g(x)<\frac{A+B}{2}$

$\Rightarrow \exists \delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, $\forall x\in U^\circ$, $f(x)>\frac{A+B}{2}>g(x)$

8.

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}\frac{1}{1+x^n}=\left(\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+x^n}\right)=(-1)\times 1=-1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}\frac{1}{1+x^n}=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x^n}\right)=1\times 1=1$

(3) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=-1$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+1}=\frac{1}{n}$

(5) 当 $x>0$ 时，$1\le\frac{[x]}{x}\le\frac{x+1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x}=1$

类似可得 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{[x]}{x}=1$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1$

9.

(1) 记 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^3)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in U^\circ(0,\delta)$, $f(x^3)\in U(A,\varepsilon)$

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta'=\sqrt[3]{\delta}$ s.t. $\forall x\in U^\circ(0,\delta')$, $f(x)\in U(A,\varepsilon)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=A$

(2) 不一定

$f(x)=\operatorname{sgn}x\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)=1$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在

习 题 3.3

1. 叙述函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 的归结原则，并应用它证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在.

2. 设 f 为定义在 $[a,+\infty)$ 上的增（减）函数. 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在的充要条件是 f 在 $[a,+\infty)$ 上有上（下）界.

3. (1) 叙述极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 的柯西准则；

(2) 根据柯西准则叙述 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 不存在的充要条件，并应用它证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$ 不存在.

4. 设 f 在 $U^\circ(x_0)$ 有定义. 证明：若对任何数列 $\{x_n\}\subset U^\circ(x_0)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都存在，则所有这些极限都相等.

5. 设 f 为 $U^\circ(x_0)$ 上的递增函数. 证明：$f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 都存在，且

$$f(x_0-0)=\sup_{x\in U_-^\circ(x_0)} f(x),\ f(x_0+0)=\inf_{x\in U_+^\circ(x_0)} f(x).$$

6. 设 $D(x)$ 为狄利克雷函数，$x_0\in\mathbf{R}$. 证明：$\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ 不存在.

7. 证明：若 f 为周期函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则 $f(x)\equiv0$.

8. 证明定理 3.9.

定理 3.9 设函数 f 在点 x_0 的某空心右邻域 $U_+^\circ(x_0)$ 有定义. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 的充要条件是：对任何以 x_0 为极限的递减数列 $\{x_n\}\subset U_+^\circ(x_0)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

这个定理的证明可仿照定理 3.8 进行，但在运用反证法证明充分性时，对 δ 的取法要作适当的修改，以保证所找到的数列 $\{x_n\}$ 能递减地趋于 x_0. 证明的细节留给读者作为练习.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a \Leftrightarrow \forall$ 递增数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=a$

设 $x_n'=2n\pi$，$x_n''=(2n-1)\pi$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos x_n'=1$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\cos x_n''=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在

2. ⇒) $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有上界，由确界原理，$\sup\limits_{x\in[a,+\infty)} f(x)$ 存在，记为A

易证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

⇐) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a \Rightarrow \forall$ 递增数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=a \Rightarrow f(x_n)$ 有上确界，记 $\sup f(x_n)=M$

由 $\{x_n\}$ 的任意性，可知 $f\le\max\{M_1,M_2,\dots\}\Rightarrow f$ 在 $[a,+\infty)$ 上有上界

3.

(1) $\forall\varepsilon>0,\exists M>0$ s.t. $\forall x_1,x_2<-M$，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 不存在 $\Leftrightarrow \exists\varepsilon>0,\forall M>0,\exists x_1,x_2<-M$ s.t. $|f(x_1)-f(x_2)|\ge\varepsilon$

令 $\varepsilon=1,\forall M>0,\exists x_1=-\frac{4[M]+5}{2}\pi$，$x_2=-\frac{4[M]+7}{2}\pi$ s.t. $x_1,x_2<-M \wedge |f(x_1)-f(x_2)|=2>\varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$ 不存在

4. 由假设有 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ s.t. $\forall x',x''\in U^\circ(x_0,\delta)$，$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0$，故对上述 δ，$\exists N$ s.t. $\forall m,n>N$，$|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ 存在，记为A

同理，对另一数列 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$ 存在，记为B

考察数列 $\{z_n\}=\{x_1,y_1,x_2,y_2,\dots\}$，由上可知 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(z_n)$ 存在，记为C

又 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 均为 $\{z_n\}$ 的子列，故 A=C，B=C ⇒ A=B，即证

5. $\forall x_n\in U_+^\circ(x_0)$，$\forall x\in U_-^\circ(x_0)$，$f(x)<f(x_n) \Rightarrow f(x)$ 在 $U_-^\circ(x_0)$ 上有上确界，记为A

$\forall\varepsilon>0,\exists x_1\in U_-^\circ(x_0)$ s.t. $f(x_1)\in U(A,\varepsilon)\Rightarrow\exists\delta=x_0-x_1,\forall x\in U_-^\circ(x_0,\delta)$，$f(x)\in U(A,\varepsilon)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在，$f(x_0-0)=\sup\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)} f(x)$

6. 不妨设 $x_0\in[0,1)$，否则将构造的数列平移即可

a) $x_0\in Q$

考察 $\{a_n\}=\frac{(n-1)x_0}{n}$，$\{b_n\}=x_0-\frac{\pi}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=x_0$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty} D(a_n)=1$，$\lim\limits_{n\to+\infty} D(b_n)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} D(x_0)$ 不存在

b) $x_0\notin Q$

考察 $\{a_n\}=\overline{x_{0n}}$ (x_0的n位不足近似)，$\{b_n\}=\frac{(n-1)x_0}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=x_0$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty} D(a_n)=1$，$\lim\limits_{n\to+\infty} D(b_n)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} D(x_0)$ 不存在

综上，$\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ 不存在

7. 假设 $f(x)\not\equiv0$

设 $f(a)\neq0$，则考察 $\{a_n\}=a+(n-1)T$，$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=f(a)\neq0$，与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 矛盾！

故 $f(x)\equiv0$

8. ⇐) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A \Rightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in U_+^\circ(x_0,\delta)$，$f(x)\in U(A,\varepsilon)$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0 \Rightarrow$ 对上述 δ，$\exists N$ s.t. $\forall n>N$，$x_n\in U_+^\circ(x_0,\delta)\Rightarrow f(x_n)\in U(A,\varepsilon)\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=A$

⇒) 假设 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq A$

则 $\exists \varepsilon_0$ s.t. $\forall \delta > 0$, $x \in \mathring{U}_+(x_0, \delta)$, $f(x) \notin U(A, \varepsilon_0)$

此时, 取 $\delta_1 = \delta_0$, 总 $\exists x_1 \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$

当 $k \geq 2$ 时, 取 $\delta_k = \min\{\frac{\delta_0}{k}, x_{k-1} - x_0\}$, 总 $\exists x_k \in \mathring{U}(x_0, \delta_k) \wedge x_k < x_{k-1}$

则 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$, 但 $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \neq A$, 矛盾

故 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$

习 题 3.4

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{(\sin x)^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$； (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$； (8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$； (10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{-x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}$（$\alpha$ 为给定实数）；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$； (6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}$（$\alpha,\beta$ 为给定实数）.

3. 证明：$\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{n\to \infty}\left[\cos x\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right]\right\}=1$.

4. 利用归结原则计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to \infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$； (2) $\lim\limits_{n\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

1.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0} 2\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}=2\times 1=2$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{(\sin x)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{x^3}\cdot\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2\cdot x=1\times 1^2\times 0=0$

(3) 令 $t=x-\frac{\pi}{2}$，则 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-\sin t}{t}=-1$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=1$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^3\frac{x}{2}}{2\cdot(\frac{x}{2})^3}\cdot\dfrac{1}{(\tan^2\frac{x}{2}+1)(1-\tan^2\frac{x}{2})}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

(6) 令 $t=\arctan x$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\tan t}=1$

(7) 令 $t=\frac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$

(8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}\cdot(\sin x+\sin a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\dfrac{x+a}{2}\cdot(\sin x+\sin a)=\cos a\cdot(2\sin a)=\sin 2a$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}=4\cdot\dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot(\sqrt{x+1}+1)=8$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}\sin\frac{x^2}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}\cdot\left(\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2=\sqrt{2}$

2.

(1) 令 $t=-\frac{2}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{-x}=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}}=e^2$

(2) 令 $t=\alpha x$，则 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{\alpha}{t}}=e^{\alpha}$

(3) 令 $t=\tan x$，则 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{e}{e^{-1}}=e^2$

(5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}\right]^2\cdot\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{-\frac{1}{3}}=e^2$

(6) $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x}=\left[(1+\frac{\alpha}{x})^{\frac{x}{\alpha}}\right]^{\alpha\beta}=e^{\alpha\beta}$

3. $\prod\limits_{k=0}^{n}\cos\dfrac{x}{2^k}=\dfrac{\sin 2x}{2^{n+1}\cdot\sin\frac{x}{2^n}}$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=0}^{n}\cos\dfrac{x}{2^k}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{2^{n+1}\cdot\sin\frac{x}{2^n}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\right)\right]=1$

4.

(1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}\sin\dfrac{\pi}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\cdot\dfrac{\pi}{\sqrt{x}}=1\times 0=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{\pi}{n}=0$

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{x+1}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}\right]^{\frac{x+1}{x}}=e$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n=e$

习 题 3.5

1. 证明下列各式：

(1) $2x-x^2=O(x)\ (x\to0)$；　(2) $x\sin\sqrt{x}=O(x^{\frac{3}{2}})\ (x\to0^+)$；

(3) $\sqrt{1+x}-1=o(1)\ (x\to0)$；

(4) $(1+x)^n=1+nx+o(x)\ (x\to0)$（$n$ 为正整数）；

(5) $2x^3+x^2=O(x^3)\ (x\to\infty)$；

(6) $o(g(x))\pm o(g(x))=o(g(x))\ (x\to x_0)$①；

(7) $o(g_1(x))\cdot o(g_2(x))=o(g_1(x)g_2(x))\ (x\to x_0)$.

2. 应用定理 3.12 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\arctan\frac{1}{x}}{x-\cos x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

3. 证明定理 3.13.

4. 求下列函数所表示曲线的渐近线：

(1) $y=\dfrac{1}{x}$；　(2) $y=\arctan x$；　(3) $y=\dfrac{3x^3+4}{x^2-2x}$.

5. 试确定 α 的值，使下列函数与 x^α 当 $x\to0$ 时为同阶无穷小量：

(1) $\sin 2x-2\sin x$；　(2) $\dfrac{1}{1+x}-(1-x)$；

(3) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$；　(4) $\sqrt[5]{3x^2-4x^3}$.

6. 试确定 α 的值，使下列函数与 x^α 当 $x\to\infty$ 时为同阶无穷大量：

(1) $\sqrt{x^2+x^5}$；　(2) $x+x^2(2+\sin x)$；

(3) $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$.

---

7. 证明：若 S 为无上界数集，则存在一递增数列 $\{x_n\}\subset S$，使得 $x_n\to+\infty\ (n\to\infty)$.

8. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b\neq0$. 证明：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\infty$.

9. 设 $f(x)\sim g(x)\ (x\to x_0)$，证明：

$$f(x)-g(x)=o(f(x))\quad 或\quad f(x)-g(x)=o(g(x)).$$

10. 写出并证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 的归结原则.

1.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left|\dfrac{2x-x^2}{x}\right|=|2-x|=2\Rightarrow\left|\dfrac{2x-x^2}{x}\right|$ 在 $U^\circ(0)$ 上有界 $\Rightarrow 2x-x^2=O(x)\quad(x\to0)$

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\left|\dfrac{x\sin\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}\right|=\left|\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right|=1\Rightarrow\left|\dfrac{x\sin\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}\right|$ 在 $U^\circ_+(0)$ 上有界 $\Rightarrow x\sin\sqrt{x}=O(x^{\frac{3}{2}})\quad(x\to0^+)$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{1+x}-1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}+1}=0\Rightarrow\sqrt{1+x}-1=o(1)\ (x\to0)$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^n-1-nx}{x}=\lim\limits_{x\to0}\sum\limits_{k=2}^{n}C_n^k x^{k-1}=0\Rightarrow(1+x)^n=1+nx+o(x)\quad(x\to0)$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{1}{x})=2\Rightarrow 2x^3+x^2=O(x^3)\quad(x\to\infty)$

(6) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{o(g(x))\pm o(g(x))}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{o(g(x))}{g(x)}\pm\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{o(g(x))}{g(x)}=0\Rightarrow o(g(x))\pm o(g(x))=o(g(x))\quad(x\to x_0)$

(7) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{o(g_1(x))\,o(g_2(x))}{g_1(x)g_2(x)}=\left(\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{o(g_1(x))}{g_1(x)}\right)\left(\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{o(g_2(x))}{g_2(x)}\right)=0\Rightarrow o(g_1(x))\cdot o(g_2(x))=o(g_1(x)g_2(x))\quad(x\to x_0)$

2.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\arctan\frac{1}{x}}{x-\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot\frac{1}{x}}{x-\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-\cos x}=0$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}+1}=1\Rightarrow\sqrt{1+x^2}-1\sim\frac{1}{2}x^2\ (x\to0)$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2}=1$

3. 略

4.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0\Rightarrow k=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0\Rightarrow b=0$

故 $l_1: y=0$

又 $\lim\limits_{x\to0^-}y=-\infty$，$\lim\limits_{x\to0^+}y=+\infty\Rightarrow l_2: x=0$

综上，$l_1: y=0$，$l_2: x=0$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=0\Rightarrow k=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(y-kx)=-1\Rightarrow b_1=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(y-kx)=1\Rightarrow b_2=1$

故 $l_1: y=-1$，$l_2: y=1$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4}{x^3-2x^2}=3\Rightarrow k=3$

$\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+4}{x^2-2x}=6\Rightarrow b=6$

故 $l_1: y=3x+6$

又 $\lim\limits_{x\to0^-}y=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^+}y=-\infty\Rightarrow l_2: x=0$

同理 $l_3: x=2$

综上，$l_1: y=3x+6$，$l_2: x=0$，$l_3: x=2$

5.

(1) $\sin2x-2\sin x=2(\cos x-1)\sin x$

又当 $x\to0$，$\cos-1\sim\frac{1}{2}x^2$，$\sin x\sim x^3\Rightarrow\alpha=3$

(2) $\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{x^2}{1+x}$

当 $x\to 0$, $\frac{x^2}{1+x}\sim x^2 \Rightarrow \alpha=2$

(3) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}=\frac{\tan x+\sin x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}}$

又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x+\sin x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}}}{x}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}}\cdot\left(\frac{\tan x}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)=1 \Rightarrow$ 当 $x\to 0$ 时, $\frac{\tan x+\sin x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}}\sim x$

$\Rightarrow \alpha=1$

(4) 当 $x\to 0$ 时, $\sqrt[5]{3x^2-4x^3}=x^{\frac{2}{5}}(3-4x)^{\frac{1}{5}}\sim 3^{\frac{1}{5}}x^{\frac{2}{5}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{3x^2-4x^3}}{x^{\alpha}}=\lim\limits_{x\to 0}3^{\frac{1}{5}}x^{\frac{2}{5}-\alpha} \Rightarrow \alpha=\frac{2}{5}$

6.

(1) 当 $x\to\infty$ 时, $\sqrt{x^2+x^5}=x^{\frac{5}{2}}(x^{-3}+1)^{\frac{1}{2}}\sim x^{\frac{5}{2}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x^5}}{x^{\alpha}}=\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{5}{2}-\alpha} \Rightarrow \alpha=\frac{5}{2}$

(2) 当 $x\to\infty$ 时, $x+x^2(2+\sin x)=x^2(x^{-1}+2+\sin x) \Rightarrow \alpha=2$

(3) $\alpha=\frac{n^2+n}{2}$

7. S 无上界 $\Rightarrow$ 必存在无上界数列 $\{a_n\}$

$\forall M$, $\exists k_1$ s.t. $a_{k_1}>M$

又 $\forall k_1$, $\exists k_2>k_1$ s.t. $a_{k_2}>a_{k_1}$，否则大于 a_{k_1} 的 a_n 只有有限项，与 $\{a_n\}$ 无界矛盾!

则令 $x_n=a_{k_n}$ 即可

8. 不妨设 $b>0$

$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b \Rightarrow \exists \delta_1$ s.t. $\forall x\in U^{\circ}(x_0,\delta_1)$, $g(x)\in U(b,\frac{b}{2})$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty \Rightarrow \forall M'=\frac{2M}{b}$, $\exists \delta_2$ s.t. $\forall x\in U^{\circ}(x_0,\delta_2)$, $|f(x)|>M'$

$\Rightarrow \forall M$, $\exists \delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ s.t. $\forall x\in U^{\circ}(x_0,\delta)$, $|f(x)g(x)|>M'\cdot\frac{b}{2}=M$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\infty$

9. $f(x)\sim g(x)\ (x\to x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)=0 \Rightarrow f(x)-g(x)=o(g(x))$

同理 $f(x)-g(x)=o(g(x))$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall\{a_n\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}f(a_n)=+\infty$

第三章总练习题

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 3^-}(x-[x])$；　(2) $\lim\limits_{x\to 1^+}([x]+1)^{-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(b-x)}\right)$；

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$；　(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$；　(7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$，$m,n$ 为正整数.

2. 分别求出满足下述条件的常数 a 与 b：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$；　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$.

3. 试分别举出符合下列要求的函数 f：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)\neq f(2)$；　(2) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 不存在.

4. 试给出函数 f 的例子，使 $f(x)>0$ 恒成立，而在某一点 x_0 处有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$. 这同极限的局部保号性有矛盾吗？

5. 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{u\to A}g(u)=B$，在何种条件下能由此推出

$$\lim_{x\to a}g(f(x))=B?$$

6. 设 $f(x)=x\cos x$. 试作数列

(1) $\{x_n\}$ 使得 $x_n\to\infty\ (n\to\infty)$，$f(x_n)\to 0\ (n\to\infty)$；

(2) $\{y_n\}$ 使得 $y_n\to\infty\ (n\to\infty)$，$f(y_n)\to+\infty\ (n\to\infty)$；

(3) $\{z_n\}$ 使得 $z_n\to\infty\ (n\to\infty)$，$f(z_n)\to-\infty\ (n\to\infty)$.

7. 证明：若数列 $\{a_n\}$ 满足下列条件之一，则 $\{a_n\}$ 是无穷大数列：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r>1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=s>1\ (a_n\neq 0, n=1,2,\cdots)$.

8. 利用上题(1)的结论求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

9. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=+\infty$；

(2) 若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=+\infty$.

10. 利用上题结果求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n!)}{n}$.

11. 设 f 为 $U_-^\circ(x_0)$ 上的递增函数. 证明：若存在数列 $\{x_n\}\subset U_-^\circ(x_0)$ 且 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，则有

$$f(x_0-0)=\sup_{x\in U_-^\circ(x_0)}f(x)=A.$$

12. 设函数 f 在 $(0,+\infty)$ 上满足方程 $f(2x)=f(x)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$. 证明：$f(x)\equiv A$，$x\in(0,+\infty)$.

13. 设函数 f 在 $(0,+\infty)$ 上满足方程 $f(x^2)=f(x)$，且

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=f(1).$$

证明：$f(x)\equiv f(1)$，$x\in(0,+\infty)$.

14. 设函数 f 定义在 $(a,+\infty)$ 上，f 在每一个有限区间 (a,b) 上有界，并满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=A$. 证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A.$$

1.

(1) $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\varepsilon$ s.t. $\forall x\in U_-^\circ(3,\delta)$，$|f(x)-1|<\delta=\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=1$

(2) $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\frac{1}{2}$ s.t. $\forall x\in U_+^\circ(1,\delta)$，$|f(x)-\frac{1}{2}|=0<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\frac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(b-x)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2(a+b)x}{\sqrt{(a+x)(b+x)}+\sqrt{(a-x)(b-x)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2(a+b)}{\sqrt{\frac{a+x}{x}\cdot\frac{b+x}{x}}+\sqrt{\frac{a-x}{x}\cdot\frac{b-x}{x}}}=a+b$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}=1$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}=-1$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{3}}+(1+x)^{\frac{1}{6}}(1-x)^{\frac{1}{6}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}}{(1+x)^{\frac{1}{6}}+(1-x)^{\frac{1}{6}}}=\dfrac{3}{2}$

(7) $\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}=\dfrac{m(1+\cdots+x^{n-1})-n(1+\cdots+x^{m-1})}{(1-x)(1+\cdots+x^{m-1})(1+\cdots+x^{n-1})}$

又 $m(1+\cdots+x^{n-1})-n(1+\cdots+x^{m-1})=m(1+\cdots+x^{n-1})-mn+mn-n(1+\cdots+x^{m-1})$

$=m[(1-1)+(x-1)+\cdots+(x^{n-1}-1)]-n[(1-1)+(x-1)+\cdots+(x^{m-1}-1)]$

$=(x-1)m[1+(1+x)+\cdots+(1+\cdots+x^{n-2})]-(x-1)n[1+(1+x)+\cdots+(1+\cdots+x^{m-2})]$

故原式 $=\lim\limits_{x\to 1}-\dfrac{m[1+(1+x)+\cdots+(1+\cdots+x^{n-2})]-n[1+(1+x)+\cdots+(1+\cdots+x^{m-2})]}{(1+\cdots+x^{m-1})(1+\cdots+x^{n-1})}$

$=-\dfrac{m\cdot\frac{n(n-1)}{2}-n\cdot\frac{m(m-1)}{2}}{mn}$

$=\dfrac{m-n}{2}$

2.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=0$

$\Rightarrow\begin{cases}1-a=0\\-(a+b)=0\end{cases}$

$\Rightarrow a=1,\ b=-1$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=0$

$\Rightarrow\begin{cases}1-a^2=0\\-(1+2ab)=0\end{cases}$

又 $x\to-\infty\Rightarrow a<0$

$\Rightarrow a=-1,\ b=\frac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=0$

$\Rightarrow\begin{cases}1-a^2=0\end{cases}$

$-(1+2ab)=0$

又 $x\to+\infty \Rightarrow a>0$

$\Rightarrow a=1,\ b=-\frac{1}{2}$

3.

(1) $f(x)=\begin{cases} 1, & x=2 \\ 0, & else \end{cases}$

(2) $f(x)=\frac{1}{x-2}$

4. $f(x)=\begin{cases} -x, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ x, & x>0 \end{cases}$

与保号性不矛盾

5. a) $\forall u\in U^{\circ}(A,\delta),\ g(u)\in U(B,\varepsilon)\Rightarrow f(x)\in U^{\circ}(A,\delta)\Rightarrow f(x)\neq A$

b) $g(x)$ 连续

6.

(1) $x_n=\frac{2n-1}{2}\pi$

(2) $y_n=2n\pi$

(3) $z_n=(2n-1)\pi$

7.

(1) 由保号性可知，$\exists N_1$ s.t. $\forall n>N_1,\ \sqrt[n]{|a_n|}>\frac{r}{2}\Rightarrow |a_n|>(\frac{r}{2})^n$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{r}{2})^n=+\infty$，即 $\forall M>0,\ \exists N_2$ s.t. $\forall n>N_2,\ (\frac{r}{2})^n>M$

$\Rightarrow \forall M>0,\ \exists N=\max\{N_1,N_2\}$ s.t. $\forall n>N,\ |a_n|>(\frac{r}{2})^n>M\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\infty$

(2) 由保号性可知，$\exists N_1$ s.t. $\forall n>N_1,\ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>\frac{s}{2}\Rightarrow |a_{2n}|>\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|\cdot(\frac{s}{2})^n$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{s}{2})^n=+\infty$，即 $\forall M'=\frac{M}{\prod_{k=1}^{n}|a_k|}>0,\ \exists N_2$ s.t. $\forall n>N_2,\ (\frac{s}{2})^n>M'$

$\Rightarrow \forall M>0,\ \exists N=\max\{2N_1,N_2\}$ s.t. $\forall n>N,\ |a_n|>M\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\infty$

8.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e>1\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\infty$

又 $a_n>0\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\frac{1}{e}<1\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$

9.

(1) $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}+\frac{a_{N+1}+\cdots+a_n}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}=0\Rightarrow \exists N_1$ s.t. $\frac{a_1+\cdots+a_{N_1}}{n}>-1$

又 $\exists N_2$ s.t. $\forall n>N_2,\ a_n>2(M+1)$

则 $\forall M>0,\ \exists N_3=\max\{N_1,N_2\}$ s.t. $\forall n>N_3,\ \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}>-1+\frac{n-N}{n}\cdot 2(M+1)$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-N}{n}=1\Rightarrow \exists N_4$ s.t. $\forall n>N_4,\ \frac{n-N}{n}>\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \forall M>0,\ \exists N=\max\{N_3,N_4\}$ s.t. $\forall n>N,\ \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}>-1+\frac{n-N}{n}\cdot 2(M+1)>-1+\frac{1}{2}\cdot 2(M+1)=M\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=+\infty$

(2) $(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln(a_1\cdots a_n)}=e^{\frac{\ln a_1+\cdots+\ln a_n}{n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\ln a_n=+\infty$，故由(1)可知，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln a_1+\cdots+\ln a_n}{n}=+\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{\ln a_1+\cdots+\ln a_n}{n}}=+\infty$

10.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(n!)^{\frac{1}{n}}=+\infty$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln n=+\infty\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln 1+\cdots+\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n!)}{n}=+\infty$

11. 假设 $f(x_0-0)\neq A$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$ 与归结原则矛盾！

故 $f(x_0-0)=A$

假设 $\exists x_1\in \mathring{U}_-(x_0)$ s.t. $f(x_1)\geq A$

由 $f(x)$ 递增 $\Rightarrow \forall x\in \mathring{U}_-(x_0, x_0-x_1)$, $f(x)>A$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0 \Rightarrow \exists N$ s.t. $\forall n>N$, $x_n\in \mathring{U}_-(x_0, x_0-x_1) \Rightarrow \forall n>N$, $f(x_n)>f(x_{N+1})>A$, 即 $f(x_n)\notin U(A, f(x_{N+1})-A)$, 与 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=A$ 矛盾!

故 $\forall x\in \mathring{U}_-(x_0)$, $f(x)<A$

又 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N$ s.t. $\forall n>N$, $f(x_n)\in U(A,\varepsilon)$, 即 $\exists x\in \mathring{U}_-(x_0)$ s.t. $f(x)>A-\varepsilon$

综上, $\sup\limits_{x\in \mathring{U}_-(x_0)} f(x)=A$

12. 假设 $\exists x_0\in(0,+\infty)$ s.t. $f(x_0)\neq A$

则 $\forall n\in N$, $f(2^n x_0)=f(x_0)\neq A \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(2^n x_0)\neq A$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n x_0=+\infty$, 由归结原则, 其与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 矛盾!

故 $f(x)\equiv A$, $x\in(0,+\infty)$

13. 假设 $\exists x_0\in(1,+\infty)$ s.t. $f(x_0)\neq f(1)$

则 $\forall n\in N$, $f(x_0^{2^n})=f(x_0)\neq A \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_0^{2^n})\neq A$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_0^{2^n}=+\infty$, 由归结原则, 其与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(1)$ 矛盾!

故 $f(x)\equiv f(1)$, $x\in(1,+\infty)$

类似可证, $f(x)\equiv f(1)$, $x\in(0,1)$

综上, $f(x)\equiv f(1)$, $x\in(0,+\infty)$

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=A \Rightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists M>a$ s.t. $\forall x>M$, $f(x+1)-f(x)\in U(A,\varepsilon)$

又 $|f(x)-Ax|=|f(x)-f(x-1)-A+f(x-1)-f(x-2)-A+\cdots+f(x-k+1)-f(x-k)-A+f(x-k)-Ax+kA|$

$\leq |f(x)-f(x-1)-A|+\cdots+|f(x-k+1)-f(x-k)-A|+|f(x-k)|+(x-k)|A|$

$\leq k\varepsilon+|f(x-k)|+(x-k)|A|$

$\forall x>M$, $\exists k$ s.t. $x-k\in[M, M+1]$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x}-A\right| = \left|\frac{f(x)-Ax}{x}\right|$$

$$\leq \frac{k\varepsilon}{x}+\left|\frac{f(x-k)}{x}\right|+\frac{(x-k)|A|}{x}$$

$$\leq \frac{k\varepsilon}{x}+\frac{(x-M)\varepsilon}{x}+\frac{(M+1)|A|}{x}$$

由有界性可知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists M>a$ s.t. $\forall x>M$, $\frac{k\varepsilon}{x}+\frac{(x-M)\varepsilon}{x}+\frac{(M+1)|A|}{x}<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$

即证

习 题 4.1

1. 按定义证明下列函数在其定义域内连续：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$；　　(2) $f(x)=|x|$.

2. 指出下列函数的间断点并说明其类型：

(1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$；

(3) $f(x)=[\,|\cos x|\,]$；　　(4) $f(x)=\operatorname{sgn}|x|$；

(5) $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$；　　(6) $f(x)=\begin{cases} x, & x \text{ 为有理数}, \\ -x, & x \text{ 为无理数}; \end{cases}$

(7) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+7}, & -\infty<x<-7, \\ x, & -7\leqslant x\leqslant 1, \\ (x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}, & 1<x<+\infty. \end{cases}$

3. 延拓下列函数，使其在 **R** 上连续：

(1) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$；　　(3) $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$.

4. 证明：若 f 在点 x_0 连续，则 $|f|$ 与 f^2 也在点 x_0 连续. 又问：若 $|f|$ 或 f^2 在 I 上连续，那么 f 在 I 上是否必连续？

5. 设当 $x\neq 0$ 时 $f(x)=g(x)$，而 $f(0)\neq g(0)$. 证明：f 与 g 两者中至多有一个在 $x=0$ 连续.

6. 设 f 为区间 I 上的单调函数. 证明：若 $x_0\in I$ 为 f 的间断点，则 x_0 必是 f 的第一类间断点.

7. 设函数 f 只有可去间断点，定义

$$g(x)=\lim_{y\to x} f(y).$$

证明 g 为连续函数.

8. 设 f 为 **R** 上的单调函数，定义

$$g(x)=f(x+0).$$

证明 g 在 **R** 上每一点都右连续.

9. 举出定义在 $[0,1]$ 上分别符合下述要求的函数：

(1) 只在 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}$ 和 $\dfrac{1}{4}$ 三点不连续的函数；

(2) 只在 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}$ 和 $\dfrac{1}{4}$ 三点连续的函数；

(3) 只在 $\dfrac{1}{n}\ (n=1,2,3,\cdots)$ 上间断的函数；

(4) 只在 $x=0$ 右连续，而在其他点都不连续的函数.

1.

(1) $\forall x_0\neq 0,\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\dfrac{1}{x_0}=f(x_0)$

(2) $\forall x_0>0,\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=x_0=f(x_0)$

$\forall x_0<0,\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-x_0=f(x_0)$

当 $x_0=0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=0=f(x_0)$

2.

(1) $x_0=0$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}(x+\frac{1}{x})=-\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}(x+\frac{1}{x})=+\infty \Rightarrow x=x_0$ 是第二类间断点

(2) $x_0=0$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{\sin x}{|x|}=-1$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{\sin x}{|x|}=1 \Rightarrow x=x_0$ 是跳跃间断点

(3) $x_0=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$，$\lim\limits_{x\to x_0}[|\cos x|]=1 \Rightarrow x=x_0$ 是可去间断点

(4) $x_0=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{sgn}|x|=1 \Rightarrow x=x_0$ 是可去间断点

(5) $x_0=\dfrac{2k-1}{2}\pi,\ k\in\mathbb{Z}$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}\operatorname{sgn}(\cos x)=-\lim\limits_{x\to x_0^+}\operatorname{sgn}(\cos x)\neq 0 \Rightarrow x=x_0$ 是跳跃间断点

(6) $x_0=x,\ x\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在 $\Rightarrow x=x_0$ 是第二类间断点

(7) $x_1=-7$，$\lim\limits_{x\to x_1^-} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to x_1^+} f(x)=-7 \Rightarrow x=x_1$ 是第二类间断点

$x_2=1$，$\lim\limits_{x\to x_2^-} f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to x_2^+} f(x)=0 \Rightarrow x=x_2$ 是跳跃间断点

3.

(1) $x_0=2$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-8}{x-2}=12$

$\Rightarrow \hat{f}=\begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2},\ x\neq 2 \\ 12,\ x=2 \end{cases} = x^2+2x+4$

(2) $x_0=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \hat{f}=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2},\ x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2},\ x=0 \end{cases}$

(3) $x_0=0$，$\lim\limits_{x\to x_0} x\cos\dfrac{1}{x}=0$

$\Rightarrow \hat{f}=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x},\ x\neq 0 \\ 0,\ x=0 \end{cases}$

4.

(1) f 在 x_0 处连续 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0,\delta),\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

又 $||f(x)|-|f(x_0)||\leq|f(x)-f(x_0)| \Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0,\delta),\ ||f(x)|-|f(x_0)||<|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|$

$|f^2(x)-f^2(x_0)|=|f(x)+f(x_0)||f(x)-f(x_0)|$，又 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Rightarrow f(x)$ 在 $U^\circ(x_0)$ 有界 $\Rightarrow \forall x\in U^\circ(x),\ |f(x)|<M \Rightarrow |f(x)+f(x_0)|<2M$

故 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0,\delta),\ |f(x)-f(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{M} \Rightarrow |f^2(x)-f^2(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f^2(x)=f^2(x_0)$

(2) 不一定

考察 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$，则 $|f|$, f^2 均连续，但 f 在 $x=0$ 处不连续

5. 设 $f(0)=a$, $g(0)=b$，不妨设 $a<b$

假设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x=0$ 处均连续

则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=a \Rightarrow$ 令 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$, $\exists \delta>0$ s.t. $\forall x\in U^\circ(0,\delta)$, $f(x)\in(a,\varepsilon)\Rightarrow g(x)=f(x)<a+\varepsilon=\frac{a+b}{2}\Rightarrow g(x)\notin U(b,\varepsilon)$

与 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=b$ 矛盾!

故 $f(x)$, $g(x)$ 中至多有一个在 $x=0$ 连续

6. 不妨设 f 单调增，$I=[a,b]$

设 $x_0\in I$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$

假设 $x=x_0$ 是第二类间断点

a) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$

则令 $M=f(\frac{a+x_0}{2})$, $\exists\delta$ s.t. $\forall x\in U_-^\circ(x_0,\delta)$, $f(x)<M \Rightarrow \exists x_1\in(\frac{a+x_0}{2}, x_0)$ s.t. $f(x_1)<f(\frac{a+x_0}{2})$，与 f 在 I 上单增矛盾!

b) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$

则令 $M=f(\frac{x_0+b}{2})$, $\exists\delta$ s.t. $\forall x\in U_-^\circ(x_0,\delta)$, $f(x)>M=f(\frac{x_0+b}{2})$，与 f 在 I 上单增矛盾!

类似可证，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ 会导出矛盾!

综上，$x=x_0$ 是第一类间断点

7. 设 I 为 f 的定义域. 由于 f 只有可去间断点，故 $\forall x_0\in I$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在

$\forall x_0\in I$, $\lim\limits_{y\to x_0} f(y)=g(x_0)\Rightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta$ s.t. $\forall y\in U^\circ(x_0,\delta)$, $|f(y)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$

又 $\lim\limits_{y\to x}(f(y)-g(x_0))=g(x)-g(x_0)\Rightarrow\lim\limits_{y\to x}|f(y)-g(x_0)|=|g(x)-g(x_0)|$

综上，由保不等式性，有 $|g(x)-g(x_0)|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$

即有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$，即证

8. f 在 $\mathbb{R}$ 上单调 $\Rightarrow f(x)$ 只有第一类间断点 $\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=f(x+0)$ 有意义

$\forall x_0\in\mathbb{R}$, $g(x_0)=\lim\limits_{y\to x_0^+} f(y)\Rightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta$ s.t. $\forall y\in U_+^\circ(x_0,\delta)$, $|f(y)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall x\in U_+^\circ(x_0,\delta)$, $\lim\limits_{y\to x^+}(f(y)-g(x_0))=g(x)-g(x_0)\Rightarrow\lim\limits_{y\to x}|f(y)-g(x_0)|=|g(x)-g(x_0)|$

综上，由保不等式性，有 $|g(x)-g(x_0)|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$

即有 $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=g(x_0)$，即证

9.

(1) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\}\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

(2) $f(x)=(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{4})D(x)$

(3) $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\{\frac{1}{n}\mid n\in N^+\}\\ 0, & \text{else}\end{cases}$　　此题 $g(x)=\begin{cases}0, & x\in\{\frac{1}{n}\mid n\in N^+\}\\ 1, & \text{else}\end{cases}$ 是不成立的，因为此时 $g(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

(4) $f(x)=xD(x)$

习 题 4.2

1. 讨论复合函数 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 的连续性，设

(1) $f(x)=\operatorname{sgn} x, g(x)=1+x^2$；

(2) $f(x)=\operatorname{sgn} x, g(x)=(1-x^2)x$.

2. 设 f,g 在点 x_0 连续，证明：

(1) 若 $f(x_0)>g(x_0)$，则存在 $U(x_0;\delta)$，使在其上有 $f(x)>g(x)$；

(2) 若在某 $U^\circ(x_0)$ 上有 $f(x)>g(x)$，则 $f(x_0)\geqslant g(x_0)$.

3. 设 f,g 在区间 I 上连续. 记

$$F(x)=\max\{f(x),g(x)\}, G(x)=\min\{f(x),g(x)\}.$$

证明 F 和 G 也都在 I 上连续.

提示：利用第一章总练习题 1.

4. 设 f 为 $\mathbf{R}$ 上连续函数，常数 $c>0$. 记

$$F(x)=\begin{cases}-c, & f(x)<-c,\\ f(x), & |f(x)|\leqslant c,\\ c, & f(x)>c.\end{cases}$$

证明 F 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

提示：$F(x)=\max\{-c,\min\{c,f(x)\}\}$.

5. 设 $f(x)=\sin x, g(x)=\begin{cases}x-\pi, & x\leqslant 0,\\ x+\pi, & x>0.\end{cases}$ 证明：复合函数 $f\circ g$ 在 $x=0$ 连续，但 g 在 $x=0$ 不连续.

6. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 证明：f 在 $[a,+\infty)$ 上有界. 又问 f 在 $[a,+\infty)$ 上必有最大值或最小值吗？

7. 若对任何充分小的 $\varepsilon>0$，f 在 $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ 上连续，能否由此推出 f 在 (a,b) 上连续？

8. 求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\pi-x)\tan x$； (2) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x\sqrt{1+2x}-\sqrt{x^2-1}}{x+1}$.

9. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上连续，且对任何 $x\in[a,b]$，$f(x)\neq0$，则 f 在 $[a,b]$ 上恒正或恒负.

10. 证明：任一实系数奇次方程至少有一个实根.

11. 试用一致连续的定义证明：若 f,g 都在区间 I 上一致连续，则 $f+g$ 也在 I 上一致连续.

12. 证明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

提示：$[0,+\infty)=[0,1]\cup[1,+\infty)$，利用定理 4.9 和例 10 的结论.

13. 证明：$f(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，但在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续.

14. 设函数 f 在区间 I 上满足**利普希茨**(Lipschitz)**条件**，即存在常数 $L>0$，使得对 I 上任意两点 x', x''，都有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant L|x'-x''|.$$

证明 f 在 I 上一致连续.

15. 证明 $\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

提示：利用不等式 $|\sin x'-\sin x''|\leqslant|x'-x''|$（见第三章 §1 例 4）.

---

16. 设函数 f 满足第 6 题的条件. 证明 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

17. 设函数 f 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$. 证明：存在点 $x_0\in[0,a]$，使得 $f(x_0)=f(x_0+a)$.

18. 设 f 为 $[a,b]$ 上的增函数，其值域为 $[f(a),f(b)]$. 证明 f 在 $[a,b]$ 上连续.

19. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$. 证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$

20. 证明 $f(x)=\cos\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

提示：$[0,+\infty)=[0,1]\cup[1,+\infty)$. 在 $[1,+\infty)$ 上成立不等式

$$|\cos\sqrt{x'}-\cos\sqrt{x''}|\leqslant|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|\leqslant|x'-x''|.$$

1.

(1) $f\circ g=\operatorname{sgn}(1+x^2)$

记 $u=g(x)$，则 $u\geq 1$

又 g 在 $\mathbb{R}$ 上连续，f 在 $[1,+\infty)$ 上连续 $\Rightarrow$ $f\circ g$ 在 x 上连续

$g\circ f=1+\operatorname{sgn}^2 x$

$\lim\limits_{x\to0}g\circ f(x)=2$，$g\circ f(0)=1$ $\Rightarrow$ $x=0$ 是 $g\circ x$ 的可去间断点

(2) $f\circ g=\operatorname{sgn}(1+x)x(1-x)$

$x_1=-1, x_2=0, x_3=1$ 是 $f\circ g$ 的可去间断点

$g\circ f=(1+\operatorname{sgn}x)(\operatorname{sgn}x)(1-\operatorname{sgn}x)$

$g\circ f(x)\equiv0\Rightarrow g\circ f$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续

2.

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Rightarrow\exists\,\delta_1>0$ s.t. $\forall x\in U(x_0;\delta_1)$，$f(x)\in U\left(f(x_0),\frac{f(x_0)-g(x_0)}{2}\right)\Rightarrow f(x)>f(x_0)-\frac{f(x_0)-g(x_0)}{2}=\frac{f(x_0)+g(x_0)}{2}$

$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)\Rightarrow\exists\,\delta_2>0$ s.t. $\forall x\in U(x_0;\delta_2)$，$g(x)\in U\left(g(x_0),\frac{f(x_0)-g(x_0)}{2}\right)\Rightarrow g(x)<g(x_0)+\frac{f(x_0)-g(x_0)}{2}=\frac{f(x_0)+g(x_0)}{2}$

$\Rightarrow\exists\,\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ s.t. $\forall x\in U(x_0;\delta)$，$f(x)>\frac{f(x_0)+g(x_0)}{2}>g(x)$

(2) 取 $\{x_n\}$ 满足 $x_i\in U^\circ(x_0)$，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=f(x_0)$

同理 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(x_n)=g(x_0)$

又 $f(x_i)>g(x_i)$，由数列极限的保不等式性，可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)\geq\lim\limits_{n\to+\infty}g(x_n)$，即 $f(x_0)\geq g(x_0)$

3. $F(x)=\frac{x+y}{2}+\left|\frac{x-y}{2}\right|$，$G(x)=\frac{x+y}{2}-\left|\frac{x-y}{2}\right|$

故其连续性显然

4. $F(x)=\max\{-c,\min\{f(x),c\}\}$

$=\frac{-c+\min\{f(x),c\}}{2}+\left|\frac{-c-\min\{f(x),c\}}{2}\right|$

$=\frac{-c+\frac{f(x)+c}{2}-\left|\frac{f(x)-c}{2}\right|}{2}+\left|\frac{-c-\frac{f(x)+c}{2}+\left|\frac{f(x)-c}{2}\right|}{2}\right|$

故其连续性显然

5. $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=-\pi$，$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\pi$，$g(0)=-\pi$ $\Rightarrow g$ 在 $x=0$ 处不连续

$\lim\limits_{x\to0^-}f\circ g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f\circ g(x)=0$，$f\circ g(0)=0\Rightarrow f\circ g$ 在 $x=0$ 处连续

6. 假设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上无界

则 $\exists \{x_n\} \in [a,+\infty)$ s.t. $f(x_n) > n$，即有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$

a) 若 $\{x_n\}$ 有界，即 $\{x_n\} \in [a,b]$

则 $\{x_n\}$ 必有收敛子列 $\{x_{k_n}\}$，设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = x_0$

由归结原则可知，$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，与 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$ 矛盾！

b) 若 $\{x_n\}$ 无界，则 $\{x_n\}$ 必有发散子列 $\{x_{k_n}\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = +\infty$

由归结原则可知，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$，与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 有极限矛盾！

综上，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界

考察 $f(x) = \frac{1}{x}$，当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界，但无最小值

7. 设 $x_0 \in (a,b)$，令 $\varepsilon_0 = \min\{\frac{x_0-a}{2}, \frac{b-x_0}{2}\}$，则 $x_0 \in [a+\varepsilon_0, b-\varepsilon_0]$

又 $\forall x \in [a+\varepsilon_0, b-\varepsilon_0]$，$\lim\limits_{y\to x} f(y) = f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Rightarrow \forall x \in (a,b)$，$\lim\limits_{y\to x} f(y) = f(x)$，即证

8.

(1) $f(x) = (\pi - x)\tan x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处连续 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4}$

(2) $f(x) = \frac{x\sqrt{1+2x} - \sqrt{x^2-1}}{x+1}$ 在 $x=1$ 处右连续 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

9. 假设 $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$ s.t. $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$，不妨设 $x_1 < x_2$

则由介值定理，$\exists x_0 \in [a,b]$ s.t. $f(x_0) = 0$，与 $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \neq 0$ 矛盾！

故 $\neg(\exists x_1, x_2 \in [a,b]$ s.t. $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0)$，即 $f(x)$ 恒正或恒负

10. 设 $\sum\limits_{i=0}^{2k-1} a_i x^i = 0$，$k \in \mathbb{N}^+$，$a_i \in \mathbb{R}$，不妨设 $a_{2k-1} > 0$

记 $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{2k-1} a_i x^i$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

由介值定理，$\exists x_0 \in \mathbb{R}$ s.t. $f(x_0) = 0$，即证

11. f 在 I 上一致连续 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ s.t. $\forall x_1, x_2 \in I$，若 $|x_1 - x_2| < \delta_1$，则 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$

g 在 I 上一致连续 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$ s.t. $\forall x_1, x_2 \in I$，若 $|x_1 - x_2| < \delta_2$，则 $|g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ s.t. $\forall x_1, x_2 \in I$，若 $|x_1 - x_2| < \delta$，$|(f(x_1) + g(x_1)) - (f(x_2) - g(x_2))| = |f(x_1) - f(x_2) + g(x_1) - g(x_2)| \le |f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow f+g$ 在 I 上一致连续

12. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$\forall a > 0$，$f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[0,a]$ 上一致连续

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta_1 = \delta(\varepsilon)$ s.t. $\forall x_1, x_2 \in [0,a]$，若 $|x_1 - x_2| < \delta_1$，则 $|x_1^{\frac{1}{2}} - x_2^{\frac{1}{2}}| < \varepsilon$

又 $|x_1^{\frac{1}{2}} - x_2^{\frac{1}{2}}| = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}|} < \frac{\delta}{2\sqrt{a}} \Rightarrow$ 令 $\delta_2 = 2\sqrt{a}\,\varepsilon$，$\forall x_1, x_2 \in [0,a]$，若 $|x_1 - x_2| < \delta_2$，则 $|x_1^{\frac{1}{2}} - x_2^{\frac{1}{2}}| < \varepsilon$

又当 $x_1, x_2 \in [\frac{a}{2}, +\infty)$，令 $\delta_3 = \frac{a}{2}$，$\forall x_1, x_2 \in [\frac{a}{2}, +\infty)$，若 $|x_1 - x_2| < \delta_3$，$|x_1^{\frac{1}{2}} - x_2^{\frac{1}{2}}| < |(\frac{a}{2})^{\frac{1}{2}} - (\frac{a}{2} + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}| = \left|\frac{\frac{a}{2} - (\frac{a}{2} + \frac{1}{2})}{(\frac{a}{2})^{\frac{1}{2}} + (\frac{a}{2} + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}\right| < \frac{\frac{1}{2}}{2 \cdot (\frac{a}{2})^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2a}}$

又 $[0,a] \cup [\frac{a}{2}, +\infty) = [0, +\infty)$

故 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ s.t. $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$，若 $|x_1 - x_2| < \delta$，$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

13. $f(x) = x^2$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow f(x) = x^2$ 在 $[a,b]$ 上一致连续

$\exists \varepsilon = \frac{1}{2}$，$\forall \delta > 0$，$\exists x_1 = \frac{4-\delta^2}{4\delta}$，$x_2 = \frac{4-\delta^2+2\delta}{4\delta}$，此时有 $|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$，$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = 1 > \varepsilon$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续

14. $\forall x_1, x_2 \in I$，$L|x_1 - x_2| \ge |f(x_1) - f(x_2)|$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = \frac{\varepsilon}{L}$ s.t. $\forall x_1, x_2 \in I$，若 $|x_1 - x_2| < \delta$，则 $|f(x_1) - f(x_2)| \le L|x_1 - x_2| = L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$

$\Rightarrow f(x)$ 在 I 上一致连续

15. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = \varepsilon$ s.t. $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$，若 $|x_1, x_2| < \delta$，$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sin x_1 - \sin x_2| \le |x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon$

$\Rightarrow f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续

16. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，由 Cauchy 准则可知 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists M > 0$ s.t. $\forall x_1, x_2 > M$，$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

a) $M \le a$，即证

b) $M>a$

则 $f(x)$ 在 $[M,+\infty)$ 上一致连续

又 $f(x)$ 在 $[a,M]$ 上一致连续

$\Rightarrow f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续　例12结论

综上，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续

17. 记 $g(x)=f(x)-f(x+a)$，$x\in[0,a]$，则 $g(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续

a) $g(0)=0 \Rightarrow f(0)=f(a)$

b) $g(0)\neq 0$，不妨设 $g(0)>0$

$g(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)=-g(0)<0$

$\Rightarrow \exists x_0\in(0,a)$ s.t. $g(x_0)=0 \Rightarrow f(x_0)=f(x_0+a)$

综上，$\exists x_0\in[0,a]$ s.t. $f(x_0)=f(x_0+a)$

18. 记 $f(x)$ 的值域为 R

假设 $\exists x_0\in[a,b]$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$

不妨设 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq f(x_0)$，则 $x_0\in(a,b]$

$f(x)$ 是增函数 $\Rightarrow \forall x\in[a,x_0)$，$f(x)<f(x_0)$

又 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq f(x_0)$，记 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=c$，显然有 $c\in[f(a),f(b)]$

则 $\frac{c+f(x)}{2}\notin R$，与 $R=[f(a),f(b)]$ 矛盾！

故 $\forall x_0\in[a,b]$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

19. 设 $f(x_s)=\min\{f(x_1),\dots,f(x_n)\}$，$f(x_t)=\max\{f(a_1),\dots,f(a_n)\}$

a) $s=t$

则 $f(x_1)=\dots=f(x_n)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$，令 $\xi=1$ 即成立

b) $s\neq t$

由算术平均的可知：$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\in[f(x_s),f(x_t)]$

不妨设 $x_s<x_t$，$f(x)$ 在 $[x_s,x_t]$ 上连续 $\Rightarrow \exists\xi\in[x_s,x_t]$ s.t. $f(\xi)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$

综上即证

20. a) $x\in[0,1]$

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致连续

b) $x\in[1,+\infty)$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon$ s.t. $\forall x_1,x_2\in[1,+\infty)$，若 $|x_1-x_2|<\delta$，则 $|f(x_1)-f(x_2)|=|\cos\sqrt{x_1}-\cos\sqrt{x_2}|\leq|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|\leq|x_1-x_2|<\delta=\varepsilon \Rightarrow f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续

综上，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续

习 题 4.3

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\cos x+5}{1+x^2+\ln(1-x)}$；　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\right)$；

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$；　(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}$.

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}=a^b$.

提示：$(a_n)^{b_n}=e^{b_n\ln a_n}$.

1.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\cos x+5}{1+x^2+\ln(1-x)}=\dfrac{e^0\cos 0+5}{1+0^2+\ln 1}=6$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}$

令 $t=\frac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{1+\sqrt{t+\sqrt{t^3}}}+1}=\dfrac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}})=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}+\sqrt{1-\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}}=1$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

令 $t=\frac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{t+\sqrt{t^3}}}}{\sqrt{1+t}}=1$

(5) 当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\cot x\sim\frac{1}{x}$

故 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

令 $t=\frac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t=e$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)^{b_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{b_n\ln a_n}=e^{b\ln a}=a^b$

第四章总练习题

1. 设函数 f 在 (a,b) 上连续，且 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 为有限值. 证明：

(1) f 在 (a,b) 上有界；

(2) 若存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)\geqslant\max\{f(a+0),f(b-0)\}$，则 f 在 (a,b) 上能取到最大值；

(3) f 在 (a,b) 上一致连续.

2. 设函数 f 在 (a,b) 上连续，且 $f(a+0)=f(b-0)=+\infty$. 证明 f 在 (a,b) 上能取到最小值.

3. 设函数 f 在区间 I 上连续，证明：

(1) 若对任何有理数 $r\in I$，有 $f(r)=0$，则在 I 上 $f(x)\equiv0$；

(2) 若对任意两个有理数 $r_1,r_2,r_1<r_2$，有 $f(r_1)<f(r_2)$，则 f 在 I 上严格增.

4. 设 a_1,a_2,a_3 为正数，$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$. 证明：方程

$$\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$$

在区间 (λ_1,λ_2) 与 (λ_2,λ_3) 上各有一个根.

提示：考虑 $f(x)=a_1(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)+a_2(x-\lambda_1)(x-\lambda_3)+a_3(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$.

5. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，且对任何 $x\in[a,b]$，存在 $y\in[a,b]$，使得

$$|f(y)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x)|.$$

证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=0$.

提示：函数 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上有最小值 $m=f(\xi)$，若 $m=0$，则已得证；若 $m>0$，可得矛盾.

6. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$，另有一组正数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$. 证明：存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_nf(x_n).$$

注：本章 §2 习题 19 是本题的特例，其中 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\frac{1}{n}$.

7. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，满足 $0\leqslant f(x)\leqslant x,x\in[0,+\infty)$. 设 $a_1\geqslant0,a_{n+1}=f(a_n),n=1,2,\cdots$. 证明：

(1) $\{a_n\}$ 为收敛数列；

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$，则有 $f(t)=t$；

(3) 若条件改为 $0\leqslant f(x)<x,x\in(0,+\infty)$，则 $t=0$.

8. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$. 证明：对任何正整数 n，存在 $\xi\in[0,1]$，使得

$$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi).$$

提示：$n=1$ 时取 $\xi=0$. $n>1$ 时令 $F(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$，则有

$$F(0)+F\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+F\left(\frac{n-1}{n}\right)=0.$$

9. 设 f 在 $x=0$ 连续，且对任何 $x,y\in\mathbf{R}$，有

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

证明：(1) f 在 $\mathbf{R}$ 上连续；(2) $f(x)=f(1)x$.

提示：(1) 易见 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x-x_0)+f(x_0)]=f(x_0)$；

(2) 对整数 $p,q\ (\neq0)$ 有 $f(p)=pf(1)$，$f\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{q}f(1)\Rightarrow$ 对有理数 r 有 $f(r)=rf(1)\Rightarrow$ 结论.

10. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 f 在 $0,1$ 两点连续，且对任何 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x^2)=f(x)$. 证明 f 为常量函数.

提示：易见 f 偶；对任何 $x\in\mathbf{R}^+$，$f(x)=f(x^{\frac{1}{2^n}})\to f(1)\ (n\to\infty)$，从而得 $x\neq0$ 时 $f(x)=f(1)$；$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(1)$.

11. 设 $0\leqslant\alpha\leqslant1$. 证明：$f(x)=x^\alpha$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

12. 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的一个非常数的连续函数，M,m 分别是最大、最小值. 证明：存在 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，使得

(1) $m<f(x)<M,x\in(\alpha,\beta)$；

(2) $f(\alpha),f(\beta)$ 恰好是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大、最小值（最小、最大值）.

1. 记 $g(x)=\begin{cases}f(a+0), & x=a\\ f(x), & x\in(a,b)\\ f(b-0), & x=b\end{cases}$

(1) $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界 $\Rightarrow f(x)$ 在 (a,b) 上有界

(2) $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow\exists x_0\in[a,b]$ s.t. $\forall x\in[a,b]$, $g(x_0)\geq g(x)$

又 $x_0\neq a$ 或 b，否则与 $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f(\xi)\geq\max\{f(a+0),f(b-0)\}$ 矛盾！

故 $x_0\in(a,b)\Rightarrow\forall x\in(a,b)$, $f(x_0)\geq f(x)$，即证

(3) $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow g(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续

$\Rightarrow f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续

2. $f(a+0)=+\infty\Rightarrow\exists\delta_1$ s.t. $\forall x\in U_+^\circ(a,\delta_1)$, $f(x)>f(\frac{a+b}{2})$，任取 $x_1\in U_+^\circ(a,\delta_1)$

$f(b-0)=+\infty\Rightarrow\exists\delta_2$ s.t. $\forall x\in U_-^\circ(b,\delta_2)$, $f(x)>f(\frac{a+b}{2})$，任取 $x_2\in U_+^\circ(b,\delta_2)$

则 $f(x)\in C[x_1,x_2]\Rightarrow\exists x_0\in[x_1,x_2]$ s.t. $\forall x\in[x_1,x_2]$, $f(x_0)\leq f(x)$

又 $f(x_0)\leq f(\frac{a+b}{2})$，则 $\forall x\in(a,b)$, $f(x_0)\leq f(x)$，即证

3.

(1) 假设 $\exists x_0\in\{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}\cap I$ s.t. $f(x_0)\neq0$

考察集合 $A=\{a_n=\overline{x_{0n}}\mid n\in\mathbb{N}^+\}$，则 $\forall\delta>0,\exists n_0$ s.t. $x_0\in U^\circ(a_{n_0},\delta)$ 且 $f(x_0)\notin U(f(a_{n_0}),|\frac{f(x_0)}{2}|)$

$\Rightarrow\exists n_0$ s.t. $\lim\limits_{x\to a_{n_0}}f(x)\neq f(a_{n_0})$，与 $f(x)$ 在 I 上连续矛盾！

故 $f(x)\equiv0$

(2) $\forall x_1,x_2\in I$，$\exists$ 递减数列 $\{a_n\}$，递增数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_i,b_i\in\mathbb{Q}$, $a_1<b_1$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_1$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x_2$

则 $a_i<b_i\Rightarrow f(a_i)<f(b_i)$

由保不等式性及归结原则可得 $f(x_1)<f(x_2)$，即证

4. $\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{a_i}{x-\lambda_i}=0\Leftrightarrow\sum a_1(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)=0$

记 $f(x)=\sum a_1(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$

则 $f(\lambda_1)>0$, $f(\lambda_2)<0\Rightarrow\exists x_1\in(\lambda_1,\lambda_2)$ s.t. $f(x_1)=0$

$f(\lambda_2)<0$, $f(\lambda_3)>0\Rightarrow\exists x_2\in(\lambda_2,\lambda_3)$ s.t. $f(x_2)=0$

即证

5. $f(x)\in C[a,b]\Rightarrow|f(x)|\in C[a,b]$

假设 $\forall x\in[a,b],\ f(x)\neq 0\Rightarrow |f(x)|>0$

则 $\exists x_0\in[a,b]$ s.t. $\forall x\in[a,b],\ |f(x_0)|\leq|f(x)|$

又 $|f(x_0)|>0$，则 $\neg(\exists x\in[a,b],\ |f(x)|\leq\frac{1}{2}|f(x_0)|)$，与题设矛盾！

故 $\exists\xi\in[a,b]$ s.t. $f(\xi)=0$

6. 不妨设 $f(x_1)\leq f(x_2)\leq\cdots\leq f(x_n)$

则 $f(x_1)\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\leq f(x_n)$

由介值定理可得，$\exists x_0\in(\min\{x_1,x_n\},\max\{x_1,x_n\})$ s.t. $f(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$

7.

(1) $0\leq f(x)\leq x\Rightarrow a_{n+1}=f(a_n)\leq a_n\Rightarrow\forall n,\ 0\leq a_n\leq a_1$ 且 $a_{n+1}\leq a_n$

即 $\{a_n\}$ 单调有界，故 $\{a_n\}$ 收敛

(2) 假设 $f(t)\neq t$

设 $f(t)=s<t$，由 $f(x)$ 在 $x=t$ 处连续可得 $\lim\limits_{x\to t}f(t)=s\Rightarrow\exists\delta$ s.t. $\forall x\in U(t,\delta)$，$f(x)\in U(s,\frac{t-s}{2})\Rightarrow\forall x\in U^{\circ}(t,\delta_1)$，$f(x)<\frac{s+t}{2}<t$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=t$，则 $\exists N$ s.t. $\forall n>N,\ a_n\in U(t,\delta)\Rightarrow a_{n+1}=f(a_n)<\frac{s+t}{2}$，即 $\exists$ 无限个 $a_n\notin U(t,\frac{t-s}{2})$，与 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=t$ 矛盾！

综上，$f(t)=t$

(3) 假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\neq 0$

设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a>0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(a_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n-1}=a$

由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=a$

又 $f(x)\in C[0,+\infty)$，故 $f(a)=a$，与 $0\leq f(x)<x$ 矛盾！

综上，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$

8. a) $n=1$，则令 $\xi=0$ 有 $f(0)=f(0+\frac{1}{1})=f(1)$

b) $n\geq 2$

记 $g(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$

则有 $g(0)+g(\frac{1}{n})+\cdots+g(\frac{n-1}{n})=0$

i) $\exists i=0,1,\ldots,n-1$ s.t. $g(\frac{i}{n})=0$，则令 $\xi=\frac{i}{n}$ 即可

ii) $\forall i=0,1,\ldots,n-1,\ g(\frac{i}{n})\neq 0$

则必 $\exists s,t\in\{0,\ldots,n-1\}$ s.t. $g(\frac{s}{n})<0,\ g(\frac{t}{n})>0$，否则与 $\sum_{i=0}^{n-1}g(\frac{i}{n})=0$ 矛盾！

不妨设 $s<t$，则由介值定理，$\exists\xi\in(\frac{s}{n},\frac{t}{n})$ s.t. $g(\xi)=0$，即 $f(\xi+\frac{1}{n})=f(\xi)$

综上，$\forall n\in N^+$，$\exists\xi\in(0,1)$ s.t. $f(\xi+\frac{1}{n})=f(\xi)$

9.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0\Rightarrow\forall x_0\in\mathbb{R}$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x-x_0)+f(x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x-x_0)+f(x_0)=\lim\limits_{t\to 0}f(t)+f(x_0)=f(x_0)$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续

(2) $f(x+y)=f(x)+f(y)\Rightarrow\forall k\in\mathbb{Z}$，$k\cdot f(\frac{1}{k})=f(1)\Rightarrow f(\frac{1}{k})=\frac{1}{k}\cdot f(1)$

则 $\forall x_0=\frac{p}{q}\in Q$，$p,q\in\mathbb{Z}$，$f(x_0)=f(\frac{p}{q})=p\cdot f(\frac{1}{q})=\frac{p}{q}\cdot f(1)$

又 $\forall x_0\in\mathbb{R}\setminus Q$，取 $\{x_n\in Q\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$

则由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n f(1)=x_0 f(1)$

又 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续 $\Rightarrow f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=x_0 f(1)$

10. $f(x^2)=f(x)\Rightarrow f(x)=f(x^{2^{-n}})$

又 $\forall x>0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}x^{2^{-n}}=1$，则由 Heine 定理，$\lim\limits_{n\to+\infty}f(x^{2^{-n}})=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)\Rightarrow f(x)=f(1)$

显然 $f(x)=f(-x)\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}^*$，$f(x)=f(1)$

又 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(1)$

综上，$f(x)\equiv f(1)$

11. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致连续

$\forall x_1, x_2 \in [1,+\infty)$，$|f(x_1)-f(x_2)| = |x_1^{\alpha}-x_2^{\alpha}|$

不妨设 $x_1 \le x_2$，则 $x_1^{\alpha} \le x_2^{\alpha}$，$x_1^{1-\alpha} \le x_2^{1-\alpha}$

$\Rightarrow x_1^{\alpha}(x_1^{1-\alpha}-1) \le x_2^{\alpha}(x_2^{1-\alpha}-1) \Rightarrow x_2^{\alpha}-x_1^{\alpha} \le x_2-x_1$

故 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta=\varepsilon$ s.t. $\forall x_1,x_2\in[1,+\infty)$，$|x_1-x_2|<\delta$，$|x_1^{\alpha}-x_2^{\alpha}| \le |x_1-x_2| < \delta = \varepsilon$，即证

12. $\exists \alpha_1, \beta_1 \in [a,b]$ s.t. $f(\alpha_1)=m$，$f(\beta_1)=M$

f 不是常值函数 $\Rightarrow \alpha_1 \ne \beta_1$

不妨设 $\alpha_1 < \beta_1$

记 $A=\{x \mid x\in[\alpha_1,\beta_1] \wedge f(x)=m\}$，显然 A 非空有界 $\Rightarrow A$ 必有上确界，记 $\sup A=\alpha\in[a,b]$

假设 $\alpha \notin A$

则必 $\exists$ 严格增的数列 $\{x_n\} \subseteq A$ s.t. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\alpha$

由上确界的性质，$\forall \varepsilon>0$，$\exists x\in A$ s.t. $x>\alpha-\varepsilon$
则令 $\varepsilon_1=1$，取得 x_1
令 $\varepsilon_k=\min\{\frac{1}{k}, \alpha-x_{k-1}\}$，取得 x_k $k=2,3,\dots,n,\dots$
即取得严格递增的数列 $\{x_n\}$，且由迫敛性可得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\alpha$

由 Heine 定理可知，$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$

又 $\{x_n\}\subseteq A \Rightarrow f(x_n)=m \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=m=f(\alpha) \Rightarrow \alpha\in A$，与 $\alpha\notin A$ 矛盾！

故 $\alpha\in A \Rightarrow \alpha<\beta_1$

记 $B=\{x \mid x\in[\alpha,\beta_1] \wedge f(x)=M\}$，显然 B 非空有界 $\Rightarrow B$ 必有下确界，记 $\inf B=\beta\in[a,b]$

类似可证，$\beta\in B \Rightarrow \alpha<\beta$

综上，$\forall x\in(\alpha,\beta)$，$m<f(x)<M$ 且 $f(\alpha)=m$，$f(\beta)=M$

习 题 5.1

1. 已知直线运动方程为

$$s = 10t + 5t^2,$$

分别令 $\Delta t = 1, 0.1, 0.01$，求从 $t=4$ 至 $t=4+\Delta t$ 这一段时间内运动的平均速度及 $t=4$ 时的瞬时速度.

2. 等速旋转的角速度等于旋转角与对应时间的比，试由此给出变速旋转的角速度的定义.

3. 设 $f(x_0)=0$，$f'(x_0)=4$，试求极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}.$$

4. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \geq 3, \\ ax+b, & x<3, \end{cases}$ 试确定 a,b 的值，使 f 在 $x=3$ 处可导.

5. 试确定曲线 $y=\ln x$ 上哪些点的切线平行于下列直线：

(1) $y=x-1$；　(2) $y=2x-3$.

6. 求下列曲线在指定点 P 的切线方程与法线方程：

(1) $y=\frac{x^2}{4}, P(2,1)$；　(2) $y=\cos x, P(0,1)$.

7. 求下列函数的导函数：

(1) $f(x)=|x|^3$；　(2) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x \geq 0, \\ 1, & x<0. \end{cases}$

8. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^m \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases} \quad (m \text{ 为正整数}),$$

试问：(1) m 等于何值时，f 在 $x=0$ 连续；

(2) m 等于何值时，f 在 $x=0$ 可导.

9. 求下列函数的稳定点：

(1) $f(x)=\sin x-\cos x$；　(2) $f(x)=x-\ln x$.

10. 设函数 f 在点 x_0 存在左、右导数，试证 f 在点 x_0 连续.

11. 设 $g(0)=g'(0)=0$，

$$f(x)=\begin{cases} g(x)\sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

求 $f'(0)$.

12. 设 f 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，且对任何 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$，都有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2).$$

若 $f'(0)=1$，证明对任何 $x \in \mathbf{R}$，都有

$$f'(x)=f(x).$$

13. 证明：若 $f'(x_0)$ 存在，则

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x} = 2f'(x_0).$$

14. 证明：若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=K$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$，则至少有一点 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi)=K$.

15. 设有一吊桥，其铁链呈抛物线形，两端系于相距 100 m 高度相同的支柱上，铁链之最低点在悬点下 10 m 处，求铁链与支柱所成之角.

16. 在曲线 $y=x^3$ 上取一点 P，过 P 的切线与该曲线交于 Q，证明：曲线在 Q 处的切线斜率正好是在 P 处切线斜率的四倍.

17. 设 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的最大零点为 x_0. 证明：$f'(x_0) \geq 0$.

1. $\bar{v}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} \Rightarrow \bar{v}|_{t=4,\Delta t=1}=55$，$\bar{v}|_{t=4,\Delta t=0.1}=50.5$，$\bar{v}|_{t=4,\Delta t=0.01}=50.05$

$v|_{t=4}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\bar{v}|_{t=4}=50$

2. $\omega(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\theta(t+\Delta t)-\theta(t)}{\Delta t}$

3. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0)-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)}{\Delta x}=4-0=4$

4. $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=6$，$\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=a \Rightarrow a=6$

$\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=3a+b=f(3)=9$

综上解得 $a=6, b=-9$

5. $y'=\frac{1}{x}$

(1) $l|_{x=1}: y=x-1$

(2) $l|_{x=\frac{1}{2}}: y=2x-\ln 2-1$

6.

(1) $l: y=x-1$，$l_1: y=-x+3$

(2) $l: y=1$，$l_1: x=0$

7.

(1) $f'(x)=\begin{cases} -3x^2, & x<0 \\ 3x^2, & x\geq 0 \end{cases}$

(2) $f'(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$ → $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

8.

(1) 当 $m\in\mathbb{Z}^+$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0 \Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

(2) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x^{m-1}\sin\frac{1}{x}$

故当 $m>1$ 时，该极限存在，即 f 在 $x=0$ 处可导.

9.

(1) $f'(x)=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

(2) $f'(x)=1-\frac{1}{x}$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=1$

10. $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，设 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$，不妨设 $a>0$

则令 $\varepsilon=a$，$\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in U_+^\circ(x_0;\delta)$，$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-a\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|}<2a$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta=\frac{\varepsilon}{2a}$ s.t. $\forall x\in U_+^\circ(x_0;\delta)$，$|f(x_0)-f(x)|<2a|x-x_0|<2a\delta=\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$

同理 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$

综上，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，即证

11. $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}\sin\frac{1}{x}=\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\right)$

又 $g'(0)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=0$，$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1$

故 $f'(0)=\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\right)=0$

12. $\forall x\in\mathbb{R}$，$f(x+0)=f(x)f(0)\Rightarrow f(x)\equiv 0$ 或 $f(0)=1$

假设 $f(x)\equiv 0$，则 $\forall x\in\mathbb{R}$，$f'(x)=0$，与 $f'(0)=1$ 矛盾！

故 $f(0)=1$

则 $\forall x\in\mathbb{R}$，$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f(x)f'(0)=f(x)$

综上即证

13. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$

$\Rightarrow\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=2f'(x_0)$

14. 不妨设 $f'_+(a)>0$，$f'_-(b)>0$，则 $\exists\Delta x\in(0,\frac{b-a}{2})$ s.t. $f(a+\Delta x)>f(a)=K$，$f(b-\Delta x)<f(b)=K$

又 f 在 $[a+\Delta x,b-\Delta x]$ 上连续且 $f(a+\Delta x)>K>f(b-\Delta x)\Rightarrow$ 由介值性定理可知，$\exists\xi\in(a+\Delta x,b-\Delta x)$ s.t. $f(\xi)=K$

即 $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f(\xi)=K$

15. $f(x)=\frac{1}{250}x^2$，$x\in[-50,50]\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{125}x$，$x\in[-50,50]$

$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=f'(50)\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{2}{5}$

16. $y'=3x^2$

设 $P(x_1,x_1^3)$，则 $k_P=f'(x_1)=3x_1^2$，$l_P: y=3x_1^2x-2x_1^3$，与 $y=x^3$ 联立得 $Q(-2x_1,-8x_1^3)$

则 $k_Q=f'(x_2)=12x_1^2=3k_P$，即证

17. 假设 $f'(x_0)<0$

则 $\exists x_1>x_0$ s.t. $f(x_1)<f(x_0)=0$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow\exists x_2>x_1$ s.t. $f(x_2)>0$

f 在 $[x_1,x_2]$ 上连续 $\Rightarrow\exists\xi\in(x_1,x_2)$ s.t. $f(\xi)=0$，又 $\xi>x_1>x_0$，与 $x=x_0$ 是 f 的最大零点矛盾！

故 $f'(x_0)\geq 0$

习 题 5.2

1. 求下列函数在指定点的导数:

(1) 设 $f(x)=3x^4+2x^3+5$，求 $f'(0)$，$f'(1)$；

(2) 设 $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$，求 $f'(0)$，$f'(\pi)$；

(3) 设 $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$，求 $f'(0)$，$f'(1)$，$f'(4)$.

2. 求下列函数的导数:

(1) $y=3x^2+2$；
(2) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x+x^2}$；
(3) $y=x^n+nx$；
(4) $y=\dfrac{x}{m}+\dfrac{m}{x}+2\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$；
(5) $y=x^3\log_3 x$；
(6) $y=e^x\cos x$；
(7) $y=(x^2+1)(3x-1)(1-x^3)$；
(8) $y=\dfrac{\tan x}{x}$；
(9) $y=\dfrac{x}{1-\cos x}$；
(10) $y=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$；
(11) $y=(\sqrt{x}+1)\arctan x$；
(12) $y=\dfrac{1+x^2}{\sin x+\cos x}$.

3. 求下列函数的导函数:

(1) $y=x\sqrt{1-x^2}$；
(2) $y=(x^2-1)^3$；
(3) $y=\left(\dfrac{1+x^2}{1-x}\right)^3$；
(4) $y=\ln(\ln x)$；
(5) $y=\ln(\sin x)$；
(6) $y=\lg(x^2+x+1)$；
(7) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；
(8) $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$；
(9) $y=(\sin x+\cos x)^3$；
(10) $y=\cos^3 4x$；
(11) $y=\sin\sqrt{1+x^2}$；
(12) $y=(\sin x^2)^3$；
(13) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$；
(14) $y=(\arctan x^3)^2$；
(15) $y=\operatorname{arccot}\dfrac{1+x}{1-x}$；
(16) $y=\arcsin(\sin^2 x)$；
(17) $y=e^{x+1}$；
(18) $y=2^{\sin x}$；
(19) $y=x^{\sin x}$；
(20) $y=x^{x^x}$；
(21) $y=e^{-x}\sin 2x$；
(22) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$；
(23) $y=\sin(\sin(\sin x))$；
(24) $y=\sin\left(\dfrac{x}{\sin\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)}\right)$；
(25) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$；
(26) $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\dfrac{a\sin x+b}{a+b\sin x}$.

4. 对下列各函数计算 $f'(x)$，$f'(x+1)$，$f'(x-1)$.

(1) $f(x)=x^3$；
(2) $f(x+1)=x^3$；
(3) $f(x-1)=x^3$.

5. 已知 g 为可导函数，a 为实数，试求下列函数 f 的导数:

(1) $f(x)=g(x+g(a))$；
(2) $f(x)=g(x+g(x))$；
(3) $f(x)=g(xg(a))$；
(4) $f(x)=g(xg(x))$.

6. 设 f 为可导函数，证明：若 $x=1$ 时有

$$\frac{d}{dx}f(x^2)=\frac{d}{dx}f^2(x).$$

则必有 $f'(1)=0$ 或 $f(1)=1$.

7. 定义**双曲函数**如下:

双曲正弦函数 $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，双曲余弦函数 $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

双曲正切函数 $\tanh x=\dfrac{\sin h\,x}{\cos h\,x}$，双曲余切函数 $\coth x=\dfrac{\cos h\,x}{\sin h\,x}$.

证明:

(1) $(\sinh x)'=\cos h\,x$；
(2) $(\cosh x)'=\sin h\,x$；
(3) $(\tanh x)'=\dfrac{1}{\cos h^2 x}$；
(4) $(\coth x)'=-\dfrac{1}{\sin h^2 x}$.

8. 求下列函数的导数:

(1) $y=\sinh^3 x$；
(2) $y=\cosh(\sinh x)$；
(3) $y=\ln(\cosh x)$；
(4) $y=\arctan(\tanh x)$.

9. 以 $\operatorname{arsinh} x$，$\operatorname{arcosh} x$，$\operatorname{artanh} x$，$\operatorname{arcoth} x$ 分别表示各双曲函数的反函数. 试求下列函数的导数:

(1) $y=\operatorname{arsinh} x$；
(2) $y=\operatorname{arcosh} x$；
(3) $y=\operatorname{artanh} x$；
(4) $y=\operatorname{arcoth} x$；
(5) $y=\operatorname{artanh} x-\operatorname{arcoth}\dfrac{1}{x}$；
(6) $y=\operatorname{arsinh}(\tan x)$.

1.

(1) $f'(x)=12x^3+6x^2$

$f'(0)=0$，$f'(1)=18$

(2) $f'(x)=\dfrac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}$

$f'(0)=1$，$f'(\pi)=-1$

(3) $f'(x)=\frac{1}{4}(x^{\frac{3}{2}}+x)^{-\frac{1}{2}}$

f 在 $x=0$ 处不可导，$f'(1)=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$，$f'(4)=\dfrac{1}{8\sqrt{3}}$

2.

(1) $y'=6x$

(2) $y'=\dfrac{-x^2-4x-1}{(x^2+x+1)^2}$

(3) $y'=nx^{n-1}+n$

(4) $y'=\dfrac{1}{m}-mx^{-2}+x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}$

(5) $y'=3x^2\log_3 x+\dfrac{x^2}{\ln 3}$

(6) $y'=e^x\cos x-e^x\sin x$

(7) $\ln y=\ln(x^2+1)+\ln(3x-1)+\ln(1-x^3)$

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{3}{3x-1}-\dfrac{2x}{1-x^2}$

$y'=(x^2+1)(3x-1)(1-x^2)\left(\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{3}{3x-1}-\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$

(8) $y'=\dfrac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}$

(9) $y'=\dfrac{1-\cos x-x\sin x}{(1-\cos x)^2}$

(10) $y'=\dfrac{2}{x(1-\ln x)^2}$

(11) $y'=\dfrac{\arctan x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{(1+x)(1-\sqrt{x})}$

(12) $y'=\dfrac{1+x^2}{\sin x+\cos x}\cdot\left(2x\ln(1+x^2)-(\cos x-\sin x)\ln(\sin x+\cos x)\right)$

3.

(1) $y'=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

(2) $y'=(2x)\cdot 3(x^2-1)^2=6x(x^2-1)^2$

(3) $\ln y=3\ln(1+x^2)-3\ln(1-x)$

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{6x}{x^2+1}+\dfrac{3}{1-x}$

$y'=\left(\dfrac{x^2+1}{1-x}\right)^3\left(\dfrac{6x}{x^2+1}+\dfrac{3}{1-x}\right)$

(4) $y'=\dfrac{1}{x\ln x}$

(5) $y'=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

(6) $y'=(2x+1)\cdot\dfrac{1}{(x^2+x+1)\ln 10}=\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)\ln 10}$

(7) $y' = \left(1 + x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \frac{1}{x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1 + x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(8) $y = \ln \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}}$

$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(1+\sqrt{1-x^2})^2} \cdot \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+\sqrt{1-x^2})}{(1+\sqrt{1-x^2})^2(1-\sqrt{1-x^2})} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

(9) $y' = (\cos x - \sin x) \cdot 3(\sin x + \cos x)^2 = 3(\sin x + \cos x)^2(\cos x - \sin x) = 3(\cos 2x)(\sin x + \cos x)$

(10) $y' = \frac{d \cos^3 4x}{dx} = \frac{d\, 4x}{dx} \cdot \frac{d \cos 4x}{d\, 4x} \cdot \frac{d \cos^3 4x}{d \cos 4x} = 4 \cdot (-\sin 4x) \cdot (3\cos^2 4x) = -12(\sin 4x)(\cos^2 4x) = -6(\sin 8x)(\cos 4x)$

(11) $y' = \frac{d \sin\sqrt{1+x^2}}{dx} = \frac{d(1+x^2)}{dx} \cdot \frac{d\sqrt{1+x^2}}{d(1+x^2)} \cdot \frac{d \sin\sqrt{1+x^2}}{d\sqrt{1+x^2}} = (2x)\left(\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)(\cos\sqrt{1+x^2}) = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cos\sqrt{1+x^2}$

(12) $y' = \frac{d \sin^3 x^2}{dx} = \frac{d x^2}{dx} \cdot \frac{d \sin x^2}{d x^2} \cdot \frac{d \sin^3 x^2}{d \sin x^2} = (2x)(\cos x^2)(3\sin^2 x^2) = 6x(\sin^2 x^2)(\cos x^2)$

(13) $y' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(14) $y' = \frac{d x^3}{dx} \cdot \frac{d \arctan x^3}{d x^3} \cdot \frac{d \arctan^2 x^3}{d \arctan x^3} = (3x^2)\left(\frac{1}{1+x^6}\right)(2\arctan x^3) = \frac{6x^2 \arctan x^3}{1+x^6}$

(15) $y' = \frac{2}{(1-x)^2} \cdot \left(-\frac{(1-x)^2}{2+2x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2}$

(16) $y' = (\cos x)(2\sin x)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\sin^4 x}}\right) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$

(17) $y' = e^{x+1}$

(18) $y' = (\cos x)(2^{\sin x} \ln 2) = (\ln 2)(\cos x) \cdot 2^{\sin x}$

(19) $\ln y = (\sin x) \ln x$

$\frac{y'}{y} = (\cos x)\ln x + \frac{\sin x}{x}$

$y' = x^{\sin x}\left((\cos x)\ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$

(20) $u = x^x \Rightarrow \ln u = x \ln x \Rightarrow \frac{u'}{u} = \ln x + 1 \Rightarrow u' = x^x(\ln x + 1)$

$y = x^u \Rightarrow \ln y = u \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = u' \ln x + \frac{u}{x} = x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}(\ln x + 1) \Rightarrow y' = x^{x^x}(x^x \ln x + x^{x-1})(\ln x + 1)$

(21) $y' = -e^{-x}\sin 2x + e^{-x}(2\cos 2x) = e^{-x}(2\cos 2x - \sin 2x)$

(22) $y' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x+\sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}}(x + \sqrt{x+\sqrt{x}})'$

$= \frac{1}{2}(x + \sqrt{x+\sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}(x+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}(x+\sqrt{x})'\right)$

$= \frac{1}{2}(x + \sqrt{x+\sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}(x+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\right)$

(23) $y' = \cos(\sin(\sin x))(\sin(\sin x))'$

$= \cos(\sin(\sin x))(\cos(\sin x)(\sin x)')$

$= \cos(\sin(\sin x))\cos(\sin x)\cos x$

(24) $y' = \left(\cos\left(\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)}\right)\right)\left(\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)}\right)'$

$= \left(\cos\left(\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)}\right)\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right) - x\cos\left(\frac{x}{\sin x}\right) \cdot \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}}{\sin^2\left(\frac{x}{\sin x}\right)}$

(25) $\ln y = \sum_{i=1}^{n} a_i \ln(x - a_i)$

$\frac{y'}{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x - a_i}$

$y' = \left(\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x-a_i}\right)$

(26) $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a\sin x + b}{a + b\sin x}\right)^2}} \cdot \frac{a\cos x(a + b\sin x) - b\cos x(a\sin x + b)}{(a + b\sin x)^2}$

$= \frac{\sqrt{a^2-b^2}\cos x}{\sqrt{a^2-b^2}\,|a + b\sin x||\cos x|}$

$= \frac{\cos x}{|a + b\sin x||\cos x|}$

4.

(1) $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2,\ f'(x+1) = 3(x+1)^2,\ f'(x-1) = 3(x-1)^2$

(2) $f(x) = (x-1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(x-1)^2,\ f'(x+1) = 3x^2,\ f'(x-1) = 3(x-2)^2$

(3) $f(x) = (x+1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(x+1)^2,\ f'(x+1) = 3(x+2)^2,\ f'(x-1) = 3x^2$

5.

(1) $f'(x) = (x + g(a))'\, g'(x + g(a)) = g'(x + g(a))$

(2) $f'(x) = (x + g(x))' g'(x + g(x)) = (1 + g'(x))\, g'(x + g(x))$

(3) $f'(x) = (x g(a))'\, g'(x g(a)) = g(a)\, g'(x g(a))$

(4) $f'(x) = (x g(x))'\, g'(x g(x)) = (g(x) + x g'(x))\, g'(x g(x))$

6. $\frac{d}{dx} f(x^2) = 2x f'(x^2)$, $\frac{d}{dx} f^2(x) = 2f(x) f'(x)$

当 $x=1$ 时, $\frac{d}{dx} f(x^2) = \frac{d}{dx} f^2(x) \Rightarrow 2f'(1) = 2f(1)f'(1) \Rightarrow f(1)=1$ 或 $f'(1)=0$

7.

(1) $(\sinh x)' = (\frac{e^x - e^{-x}}{2})' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

(2) $(\cosh x)' = (\frac{e^x + e^{-x}}{2})' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$

(3) $(\tanh x)' = (\frac{\sinh x}{\cosh x})' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$

(4) $(\coth x)' = (\frac{1}{\tanh x})' = \frac{-\tanh' x}{\tanh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}$

8.

(1) $y' = 3(\sinh^2 x)(\cosh x)$

(2) $y' = (\cosh x)(\sinh(\sinh x))$

(3) $y' = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x$

(4) $y' = \frac{1}{\cosh^2 x} \cdot \frac{1}{1+\tanh^2 x} = \frac{1}{\sinh^2 x + \cosh^2 x}$

9.

(1) $(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{(\sinh y)'} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) $(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{(\cosh y)'} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(3) $(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{(\tanh y)'} = \cosh^2 y = \frac{\cosh^2 y}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \frac{1}{1-\tanh^2 y} = \frac{1}{1-x^2}$

(4) $(\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{(\coth y)'} = -\sinh^2 y = \frac{\sinh^2 y}{\sinh^2 y - \cosh^2 y} = \frac{1}{1-\coth^2 y} = \frac{1}{1-x^2}$

(5) $y' = \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1-(\frac{1}{x})^2} = 0$

(6) $y' = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = |\sec x|$

习 题 5.3

1. 求下列由参量方程所确定的导数 $\frac{dy}{dx}$：

(1) $\begin{cases} x=\cos^4 t, \\ y=\sin^4 t \end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{3}$ 处； (2) $\begin{cases} x=\frac{t}{1+t}, \\ y=\frac{1-t}{1+t} \end{cases}$ 在 $t>0$ 处.

2. 设 $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$ 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi}$.

3. 设曲线方程 $x=1-t^2$，$y=t-t^2$，求它在下列点处的切线方程与法线方程：

(1) $t=1$； (2) $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. 证明曲线

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$$

上任一点的法线到原点距离等于 a.

5. 证明：圆 $r=2a\sin\theta$ $(a>0)$ 上任一点的切线与向径的夹角等于向径的极角.

6. 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的切线与切点向径之间的夹角.

1.

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{4\sin^3 t\cos t}{-4\sin t\cos^3 t} = -\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = -3$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{-\frac{2}{(1+t)^2}}{\frac{1}{(1+t)^2}} = -2$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t>0} = 2$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1$， $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi} = 0$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{1-2t}{2t}$

(1) $t=1 \Rightarrow (0,0)$，$k = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \ell: y=-\frac{1}{2}x$，$\ell_{\perp}: y=2x$

(2) $t=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$，$k = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \ell: y=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}x+\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\ell_{\perp}: y=(2+\sqrt{2})x-\frac{3}{2}$

4. $\frac{dy}{dx} = \tan t$

设 $P=(a(\cos t_0+t_0\sin t_0), a(\sin t_0-t_0\cos t_0)) \in C$，则 $k_{\perp} = -\cot t_0$

$\ell_{\perp}: (\cot t_0)x+y-\frac{a}{\sin t_0}=0$

$d = \frac{\left|-\frac{a}{\sin t_0}\right|}{\sqrt{\cot^2 t_0+1}} = a$

5. $\tan\varphi = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)} = \tan\theta \Rightarrow \varphi=\theta$ 弦切角定理

6. $\tan\varphi = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)} = \frac{1+\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\frac{\theta}{2}$

$\varphi = \arctan\left(-\cot\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\varphi-\pi}{2}$

习 题 5.4

1. 求下列函数在指定点的高阶导数：

(1) $f(x)=3x^3+4x^2-5x-9$，求 $f''(1)$，$f'''(1)$，$f^{(4)}(1)$；

(2) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f''(0)$，$f''(1)$，$f''(-1)$.

2. 设函数 f 在 $x=1$ 处二阶可导，证明：若 $f'(1)=0$，$f''(1)=0$，则在 $x=1$ 处有 $\dfrac{d}{dx}f(x^2)=\dfrac{d^2}{dx^2}f^2(x)$.

3. 求下列函数的高阶导数：

(1) $f(x)=x\ln x$，求 $f''(x)$；　(2) $f(x)=e^{-x^2}$，求 $f'''(x)$；

(3) $f(x)=\ln(1+x)$，求 $f^{(5)}(x)$；　(4) $f(x)=x^3e^x$，求 $f^{(10)}(x)$.

4. 设 f 为二阶可导函数，求下列各函数的二阶导数：

(1) $y=f(\ln x)$；　(2) $y=f(x^n)$，$n\in \mathbf{N}_+$；

(3) $y=f[f(x)]$.

5. 求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y=\ln x$；　(2) $y=a^x$ $(a>0,a\neq 1)$；

(3) $y=\dfrac{1}{x(1-x)}$；　(4) $y=\dfrac{\ln x}{x}$；

(5) $f(x)=\dfrac{x^n}{1-x}$；　(6) $y=e^{ax}\sin bx$（a,b 均为实数）.

6. 求由下列参量方程所确定的函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x=e^t\cos t,\\ y=e^t\sin t.\end{cases}$

7. 研究函数 $f(x)=|x^3|$ 在 $x=0$ 处的各阶导数.

8. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x 三阶可导，且 $f'(x)\neq 0$. 若 $f(x)$ 存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，试用 $f'(x)$，$f''(x)$ 以及 $f'''(x)$ 表示 $(f^{-1})'''(y)$.

9. 设 $y=\arctan x$.

(1) 证明它满足方程 $(1+x^2)y''+2xy'=0$；

(2) 求 $y^{(n)}|_{x=0}$.

10. 设 $y=\arcsin x$.

(1) 证明它满足方程 $(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$ $(n\geq 0)$；

(2) 求 $y^{(n)}|_{x=0}$.

11. 证明函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处 n 阶可导且 $f^{(n)}(0)=0$，其中 n 为任意正整数.

1.

(1) $f(x)=3x^3+4x^2-5x-9$

$f'(x)=9x^2+8x-5$

$f''(x)=18x+8 \Rightarrow f''(1)=26$

$f'''(x)=18 \Rightarrow f'''(1)=18$

$f^{(4)}(x)=0 \Rightarrow f^{(4)}(1)=0$

(2) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$f'(x)=(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$，$f''(x)=-3x(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}$

$\Rightarrow f''(0)=0$，$f''(1)=-3\times 2^{-\frac{5}{2}}$，$f''(-1)=3\times 2^{-\frac{5}{2}}$

2. $\dfrac{d}{dx}f(x^2)\Big|_{x=1}=[f(x^2)]'\Big|_{x=1}=2xf'(x)\Big|_{x=1}=2f'(1)=0$

$\dfrac{d^2}{dx^2}f^2(x)\Big|_{x=1}=[f^2(x)]''\Big|_{x=1}=[2f(x)f'(x)]'\Big|_{x=1}=2f'(x)+2f(x)f''(x)\Big|_{x=1}=2f'(1)+2f(1)f''(1)=0$

即证

3.

(1) $f(x)=x\ln x$，$f'(x)=\ln x+1$，$f''(x)=\frac{1}{x}$

(2) $f(x)=e^{-x^2}$，$f'(x)=-2xe^{-x^2}$，$f''(x)=(4x^2-2)e^{-x^2}$，$f'''(x)=(-8x^3+12x)e^{-x^2}$

(3) $f(x)=\ln(1+x)$，$f'(x)=(1+x)^{-1}$，$f''(x)=-(1+x)^{-2}$，$f'''(x)=2(1+x)^{-3}$，$f^{(4)}(x)=-6(1+x)^{-4}$，$f^{(5)}(x)=24(1+x)^{-5}$

(4) $f(x)=x^3e^x$，$f'(x)=(x^3+3x^2)e^x$，$f''(x)=(x^3+6x^2+6x)e^x$，$f'''(x)=(x^3+9x^2+18x+6)e^x$，$f^{(4)}(x)=(x^3+12x^2+36x+24)e^x$，$f^{(5)}(x)=(x^3+15x^2+60x+60)e^x$

$f^{(6)}(x)=(x^3+18x^2+90x+120)e^x$，$f^{(7)}(x)=(x^3+21x^2+126x+210)e^x$，$f^{(8)}(x)=(x^3+24x^2+168x+336)e^x$，$f^{(9)}(x)=(x^3+27x^2+216x+504)e^x$，$f^{(10)}(x)=(x^3+30x^2+270x+720)e^x$

由莱布尼茨公式，$(x^3e^x)^{(10)}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k(x^3)^{(10-k)}(e^x)^{k}=[C_{10}^0x^3+C_{10}^1(3x^2)+C_{10}^2(6x)+C_{10}^3\cdot 6]e^x=(x^3+30x^2+270x+720)e^x$

4.

(1) $y=f(\ln x)$，$y'=\frac{1}{x}f'(\ln x)$，$y''=(-\frac{1}{x^2})f'(\ln x)+(\frac{1}{x})(\frac{1}{x}f''(\ln x))=-\frac{1}{x^2}f'(\ln x)+\frac{1}{x^2}f''(\ln x)$

(2) $y=f(x^n)$，$y'=nx^{n-1}f'(x^n)$，$y''=n(n-1)x^{n-2}f'(x^n)+n^2x^{2n-2}f''(x^n)$

(3) $y=f[f(x)]$，$y'=f(x)f'[f(x)]$，$y''=f''(x)f'[f(x)]+[f'(x)]^2f''[f(x)]$

5.

(1) $y'=x^{-1}\Rightarrow y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$

(2) $y'=a^x\ln a$，$y''=a^x(\ln a)^2\Rightarrow y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$

(3) $y=x^{-1}+(1-x)^{-1}\Rightarrow y^{(n)}=(-1)^n n!\,x^{-n-1}+n!\,(1-x)^{-n-1}$

(4) $y=(\ln x)x^{-1}\Rightarrow y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\ln x)^{(n-k)}(x^{-1})^{k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k[(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!\,x^{-n+k}][(-1)^k k!\,x^{-k-1}]=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{n!(-1)^{n-1}}{n-k}\cdot x^{-n-1}=n!(-1)^{n-1}x^{-n-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}\right)$

(5) $f(x)=x^n(1-x)^{-1}\Rightarrow f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^n)^{(n-k)}[(1-x)^{-1}]^{(k)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\frac{n!}{k!}x^k)[k!(1-x)^{-k-1}]=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(n!)^2}{k!(n-k)!}\cdot x^k(1-x)^{-k-1}$

(6) $y=e^{ax}\sin bx\Rightarrow y'=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}e^{ax}\sin(bx+\varphi)$，$\varphi=\arctan\frac{b}{a}$

$\Rightarrow y''=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}e^{ax}\sin(bx+\varphi+\varphi)=(a^2+b^2)e^{ax}\sin(bx+2\varphi)$

归纳得 $y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+n\varphi)$，$\varphi=\arctan\frac{b}{a}$

6.

(1) $\varphi(t)=a\cos^3 t$，$\varphi'(t)=-3a\sin t\cos^2 t$，$\varphi''(t)=6a\sin^2 t\cos t-3a\cos^3 t$

$\psi(t)=a\sin^3 t$，$\psi'(t)=3a\sin^2 t\cos t$，$\psi''(t)=6a\sin t\cos^2 t-3a\sin^3 t$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}=\frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}$$

(2) $\varphi(t)=e^t\cos t$，$\varphi'(t)=e^t\cos t-e^t\sin t$，$\varphi''(t)=-2e^t\sin t$

$\psi(t)=e^t\sin t$，$\psi'(t)=e^t\sin t+e^t\cos t$，$\psi''(t)=2e^t\cos t$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}=\frac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$$

7. 记 $g(x)=\begin{cases}x^3, & x>0\\ -x^3, & x<0\end{cases}$

$g'(x)=\begin{cases}3x^2, & x>0\\ -3x^2, & x<0\end{cases}\Rightarrow g'(0-0)=g'(0+0)=0\Rightarrow f'(0)=0$

$g''(x)=\begin{cases}6x, & x>0\\ -6x, & x<0\end{cases}\Rightarrow g''(0-0)=g''(0+0)=0\Rightarrow f''(0)=0$

$g'''(x)=\begin{cases}6, & x>0\\ -6, & x<0\end{cases}\Rightarrow g'''(0-0)\neq g'''(0+0)\Rightarrow f'''(0)$ 不存在

综上，$f^{(k)}=\begin{cases}0, & k=1,2\\ \text{不存在}, & k\geq 3\end{cases}$

8. $(f^{-1})'(y)=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f'(x)}$

$$(f^{-1})''(y)=\frac{d\frac{dx}{dy}}{dy}=\frac{d\frac{dx}{dy}}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$$

$$(f^{-1})'''(y)=\frac{d\frac{d\frac{dx}{dy}}{dy}}{dy}=\frac{d\frac{d\frac{dx}{dy}}{dy}}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{f'''(x)[f'(x)]^3-3[f''(x)]^2[f'(x)]^2}{[f'(x)]^6}\cdot\frac{1}{f'(x)}=\frac{3[f''(x)]^2-f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}$$

9.

(1) $y'=\frac{1}{1+x^2}$，$y''=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$　　另：$(1+x^2)y'=1$

$(1+x^2)y''+2xy'=0$　　两边对 x 求导，即得 $2xy'+(1+x^2)y''=0$

(2) $(1+x^2)y''+2xy'=0$

两边对 x 求 $n-2$ 阶导，得 $\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^k(1+x^2)^{(n-k-2)}y^{(k+2)}+\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^k(2x)^{(n-k-2)}y^{(k+1)}=0$

$\Rightarrow C_{n-2}^0(1+x^2)^{(0)}y^{(n)}+C_{n-2}^1(1+x^2)^{(1)}y^{(n-1)}+C_{n-2}^2(1+x^2)^{(2)}y^{(n-2)}+C_{n-2}^0(2x)^{(0)}y^{(n-1)}+C_{n-2}^1(2x)^{(1)}y^{(n-2)}=0$

$\Rightarrow (1+x^2)y^{(n)}+(n-1)(2x)y^{(n-1)}+(n-2)(n-1)y^{(n-2)}=0$

代入 $x=0$ 得 $y^{(n)}|_{x=0}=-(n-2)(n-1)y^{(n-2)}|_{x=0}$

又 $y^{(0)}|_{x=0}=0$，$y^{(1)}|_{x=0}=1$

故 $y^{(n)}=\begin{cases}0, & 2\mid n\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & 2\nmid n\end{cases}$

10.

(1) $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow\sqrt{1-x^2}\cdot y'=1$

两边对 x 求导，得 $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}y'+\sqrt{1-x^2}\cdot y''=0\Rightarrow(x^2-1)y''+xy'=0$

两边对 x 求 n 阶导，得 $\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^2-1)^{(n-k)}y^{(k+2)}+\sum_{k=0}^{n}x^{(n-k)}y^{(k+1)}=0$

$\Rightarrow C_n^0(x^2-1)^{(0)}y^{(n+2)}+C_n^1(x^2-1)^{(1)}y^{(n+1)}+C_n^2(x^2-1)^{(2)}y^{(n)}+C_n^0x^{(0)}y^{(n+1)}+C_n^1x^{(1)}y^{(n)}=0$

$\Rightarrow(x^2-1)y^{(n+2)}+(2n+1)xy^{(n+1)}+n^2y^{(n)}=0$，即证

(2) 代入 $x=0$ 得 $y^{(n+2)}|_{x=0}=n^2y^{(n)}|_{x=0}$

又 $y^{(0)}|_{x=0}=0$，$y^{(1)}|_{x=0}=1$

故 $y^{(n)}=\begin{cases}0, & 2\mid n\\ [(n-2)!!]^2, & 2\nmid n\end{cases}$

11. $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{2te^{t^2}}=0$

$f''(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2t^4}{e^{t^2}}=0$

由上可知，$f^{(n)}(0)=\lim\limits_{t\to0}\frac{P_{3n}(t)}{e^{t^2}}=0$　→ t的3n次多项式

习 题 5.5

1. 若 $x=1$，而 $\Delta x=0.1, 0.01$. 问对于 $y=x^2$，Δy 与 dy 之差分别是多少?

2. 求下列函数的微分：

(1) $y=x+2x^2-\frac{1}{3}x^3+x^4$；　　(2) $y=x\ln x-x$；

(3) $y=x^2\cos 2x$；　　(4) $y=\frac{x}{1-x^2}$；

(5) $y=e^{ax}\sin bx$；　　(6) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

3. 求下列函数的高阶微分：

(1) 设 $u(x)=\ln x, v(x)=e^x$，求 $d^3(uv), d^3\left(\frac{u}{v}\right)$；

(2) 设 $u(x)=e^{\frac{x}{2}}, v(x)=\cos 2x$，求 $d^3(uv), d^3\left(\frac{u}{v}\right)$.

4. 利用微分求近似值：

(1) $\sqrt[3]{1.02}$；　　(2) $\lg 2.7$；

(3) $\tan 45°10'$；　　(4) $\sqrt{26}$.

5. 为了使计算出球的体积准确到 1%，问度量半径为 r 时允许发生的相对误差至多应为多少?

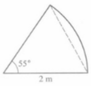


图 5-10

6. 检验一个半径为 2 m，中心角为 55° 的工件面积（图 5-10），现可直接测量其中心角或此角所对的弦长，设量角最大误差为 0.5°，量弦长最大误差为 3 mm，试问用哪一种方法检验的结果较为精确.

---

1. $x=1,\ y'|_{x=1}=2$

当 $\Delta x=0.1$ 时, $\Delta y=y|_{x+\Delta x}-y|_x=0.21,\ dy=y'|_{x=1}\Delta x=0.2$

当 $\Delta x=0.01$ 时, $\Delta y=y|_{x+\Delta x}-y|_x=0.0201,\ dy=y'|_{x=1}\Delta x=0.02$

2.

(1) $dy=(1+4x-x^2+4x^3)\,dx$

(2) $dy=\ln x\,dx$

(3) $dy=2x(\cos 2x-x\sin 2x)\,dx$

(4) $dy=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\,dx$

(5) $dy=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)\,dx$

(6) $dy=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

3.

(1) $uv=e^x\ln x,\ (uv)'=e^x(\ln x+\frac{1}{x}),\ (uv)''=e^x(\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}),\ (uv)'''=e^x(\ln x+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3})$

$d^3(uv)=(uv)'''dx=e^x(\ln x+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3})\,dx$

$\frac{u}{v}=e^{-x}\ln x,\ (\frac{u}{v})'=e^{-x}(-\ln x+\frac{1}{x}),\ (\frac{u}{v})''=e^{-x}(\ln x-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}),\ (\frac{u}{v})'''=e^{-x}(-\ln x+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3})$

$d^3(\frac{u}{v})=(\frac{u}{v})'''dx=e^{-x}(-\ln x+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3})\,dx$

(2) $uv=e^{\frac{x}{2}}\cos 2x,\ (uv)'=e^{\frac{x}{2}}(-2\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x),\ (uv)''=e^{\frac{x}{2}}(-2\sin 2x-\frac{15}{4}\cos 2x),\ (uv)'''=e^{\frac{x}{2}}(\frac{13}{2}\sin 2x-\frac{47}{8}\cos 2x)$

$d^3(uv)=(uv)'''dx=e^{\frac{x}{2}}(\frac{13}{2}\sin 2x-\frac{47}{8}\cos 2x)\,dx$

$\frac{u}{v}=\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\cos 2x},\ (\frac{u}{v})'''=e^x\sec 2x(48\tan^3 2x+12\tan^2 2x+\frac{83}{2}\tan 2x+\frac{49}{8})$

$d^3(\frac{u}{v})=e^x\sec 2x(48\tan^3 2x+12\tan^2 2x+\frac{83}{2}\tan 2x+\frac{49}{8})\,dx$

4.

(1) $x_0=1,\ \Delta x=0.02,\ f(x)=x^{\frac{1}{3}},\ f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=\frac{151}{150}$

(2) $x_0=3,\ \Delta x=-0.3,\ f(x)=\lg x,\ f'(x)=\frac{1}{x\ln 10}$

$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x\approx 0.431$

(3) $x_0=\frac{\pi}{4},\ \Delta x=\frac{\pi}{1080},\ f(x)=\tan x,\ f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$

$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=1+\frac{\pi}{540}$

(4) $x_0=25,\ \Delta x=1,\ f(x)=x^{\frac{1}{2}},\ f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=\frac{51}{10}$

5. $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3,\ V'(r)=4\pi r^2$

$\frac{\delta_V}{|V_0|}=\left|\frac{V'(r)}{V(r)}\right|\delta_r\le 1\%\Rightarrow \delta_r\le\frac{r}{300}$

6. $L(\theta)=r^2\sin\frac{\theta}{2}$

$\theta_0=55°,\ \Delta_\theta=0.5°\Rightarrow|\Delta L|\approx|L'(\theta_0)\Delta_\theta|=15\text{ mm}$

$|\Delta L|>(\Delta L)_0\Rightarrow$ 直接测量弦长更精确

第五章总练习题

1. 设 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$，证明：

(1) $y'=\frac{1}{(cx+d)^2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$；　(2) $y^{(n)}=(-1)^{n+1}\frac{n!\ c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

2. 证明下列函数在 $x=0$ 处不可导：

(1) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$；　(2) $f(x)=|\ln|x-1||$.

3. (1) 举出一个连续函数，它仅在已知点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不可导；

(2) 举出一个函数，它仅在点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 可导.

4. 证明：

(1) 可导的偶函数，其导函数为奇函数；

(2) 可导的奇函数，其导函数为偶函数；

(3) 可导的周期函数，其导函数仍为周期函数.

5. 对下列命题，若认为是正确的，请给予证明；若认为是错误的，请举一反例予以否定：

(1) 设 $f=\varphi+\psi$，若 f 在点 x_0 可导，则 φ,ψ 在点 x_0 可导；

(2) 设 $f=\varphi+\psi$，若 φ 在点 x_0 可导，ψ 在点 x_0 不可导，则 f 在点 x_0 一定不可导；

(3) 设 $f=\varphi\cdot\psi$，若 f 在点 x_0 可导，则 φ,ψ 在点 x_0 可导；

(4) 设 $f=\varphi\cdot\psi$，若 φ 在点 x_0 可导，ψ 在点 x_0 不可导，则 f 在点 x_0 一定不可导.

6. 设 $\varphi(x)$ 在点 a 连续，$f(x)=|x-a|\varphi(x)$，求 $f'_-(a)$ 和 $f'_+(a)$. 问在什么条件下 $f'(a)$ 存在？

7. 设 f 为可导函数，求下列各函数的一阶导数：

(1) $y=f(e^x)e^{f(x)}$；　(2) $y=f(f(f(x)))$.

8. 设 φ,ψ 为可导函数，求 y'：

(1) $y=\sqrt{[\varphi(x)]^2+[\psi(x)]^2}$；　(2) $y=\arctan\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$；

(3) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$ $(\varphi,\psi>0,\varphi\neq1)$.

9. 设 $f_{ij}(x)$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为可导函数，证明：

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

并利用这个结果求 $F'(x)$：

(1) $F(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$；　(2) $F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$.

1.

(1) $y'=\frac{a(cx+d)-(ax+b)c}{(cx+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

(2) 假设 $y^{(k)}=(-1)^{k+1}\frac{k!\,c^{k-1}}{(cx+d)^{k+1}}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$y^{(k+1)}=(-1)^{k+1}k!\,c^{k-1}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\left[(cx+d)^{-k-1}\right]'=(-1)^{k+1}k!\,c^{k-1}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}c(-k-1)(cx+d)^{-k-2}=(-1)^{k+2}\frac{(k+1)!\,c^{k}}{(cx+d)^{k+2}}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

综上，$y^{(n)}=(-1)^{n+1}\frac{n!\,c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

2.

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}x^{-\frac{1}{3}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}x^{-\frac{1}{3}}=-\infty$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\ln(1-x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{1-x}=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\ln(1-x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-1}{1-x}=-1$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 不存在

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

3.

(1) $f(x)=\left|\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)\right|$

(2) $f(x)=\left(\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^2\right)D(x)$　　$f(x)=x^2D(x)$ 只在 $x=0$ 处可导

4.

(1) $f'(-x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}=-f'(x)$

(2) $f'(-x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}=f'(x)$

(3) $f'(x+T)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+T+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$

5.

(1) $\varphi(x)=|x|$，$\psi(x)=-|x|$，$x_0=0\Rightarrow$ 错误

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{x-x_0}$ 不存在 $\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}+\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{x-x_0}$ 不存在 $\Rightarrow$ 正确

(3) $\varphi(x)=\psi(x)=|x|$，$x_0=0\Rightarrow$ 错误

(4) $\varphi(x)=x$，$\psi(x)=|x|$，$x_0=0\Rightarrow$ 错误

6. $f'_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\lim\limits_{x\to a^-}\varphi(x)=-\varphi(a)$，$f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\varphi(x)=\varphi(a)$

$f'_-(a)=f'_+(a)\Rightarrow\varphi(a)=0$

故当 $\varphi(a)=0$ 时，$f'(a)$ 存在

7.

(1) $y=f(e^x)e^{f(x)}$

$y'=[f(e^x)]'e^{f(x)}+f(e^x)[e^{f(x)}]'$

$=e^xf'(e^x)e^{f(x)}+f(e^x)f'(x)e^{f(x)}$

(2) $y=f(f(f(x)))$

$y'=[f(f(x))]'f'(f(f(x)))$

$=f'(x)f'(f(x))f'(f(f(x)))$

8.

(1) $y=\left([\varphi(x)]^2+[\psi(x)]^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$y'=\left([\varphi(x)]^2+[\psi(x)]^2\right)'\frac{1}{2}\left([\varphi(x)]^2+[\psi(x)]^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

$=\left(\varphi'(x)\cdot 2\varphi(x)+\psi'(x)\cdot 2\psi(x)\right)\frac{1}{2}\left([\varphi(x)]^2+[\psi(x)]^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

$=\left(\varphi'(x)\varphi(x)+\psi'(x)\psi(x)\right)\left([\varphi(x)]^2+[\psi(x)]^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

(2) $y=\arctan\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$

$y'=\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)'\cdot\frac{[\psi(x)]^2}{[\varphi(x)]^2+[\psi(x)]^2}$

$=\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{[\varphi(x)]^2+[\psi(x)]^2}$

(3) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)=\frac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)}$

$y'=\left(\frac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)}\right)'=\frac{(\ln\psi(x))'\ln\varphi(x)-\ln\psi(x)(\ln\varphi(x))'}{(\ln\varphi(x))^2}$

$=\frac{\frac{\psi'(x)\ln\varphi(x)}{\psi(x)}-\frac{\varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi(x)}}{(\ln\varphi(x))^2}$

9.

(1) $F'(x)=\begin{vmatrix}1&0&0\\-3&x&3\\-2&-3&x+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x-1&1&2\\0&1&0\\-2&-3&x+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x-1&1&2\\-3&x&3\\0&0&1\end{vmatrix}=3x^2+15$

(2) $F'(x)=\begin{vmatrix}1&2x&3x^2\\1&2x&3x^2\\0&2&6x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&x^2&x^3\\0&2&6x\\0&2&6x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&x^2&x^3\\1&2x&3x^2\\0&0&6\end{vmatrix}=6x^2$

习 题 6.1

1. 试讨论下列函数在指定区间上是否存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$：

(1) $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & 0<x\leqslant\frac{1}{\pi}, \\ 0, & x=0; \end{cases}$　(2) $f(x)=|x|, -1\leqslant x\leqslant 1$.

2. 证明：(1) 方程 $x^3-3x+c=0$（这里 c 为常数）在区间 $[0,1]$ 上不可能有两个不同的实根；

(2) 方程 $x^n+px+q=0$（n 为正整数，p,q 为实数）当 n 为偶数时至多有两个实根，当 n 为奇数时至多有三个实根.

3. 证明定理 6.2 的推论 2.

4. 证明：(1) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)\geqslant m$，则
$$f(b)\geqslant f(a)+m(b-a);$$
(2) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导，且 $|f'(x)|\leqslant M$，则
$$|f(b)-f(a)|\leqslant M(b-a);$$
(3) 对任意实数 x_1,x_2，都有 $|\sin x_1-\sin x_2|\leqslant|x_1-x_2|$.

5. 应用拉格朗日中值定理证明下列不等式：

(1) $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$，其中 $0<a<b$；

(2) $\frac{h}{1+h^2}<\arctan h<h$，其中 $h>0$.

6. 确定下列函数的单调区间：

(1) $f(x)=3x-x^2$；　(2) $f(x)=2x^2-\ln x$；

(3) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$；　(4) $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$.

7. 应用函数的单调性证明下列不等式：

(1) $\tan x>x-\frac{x^3}{3}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$；

(2) $\frac{2x}{\pi}<\sin x<x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$；

(3) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2(1+x)}, x>0$.

---

8. 以 $S(x)$ 记由 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$，$(x,f(x))$ 三点组成的三角形面积，试对 $S(x)$ 应用罗尔中值定理证明拉格朗日中值定理.

9. 设 f 为 $[a,b]$ 上二阶可导函数，$f(a)=f(b)=0$，并存在一点 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)>0$. 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.

10. 设函数 f 在 (a,b) 上可导，且 f' 单调. 证明 f' 在 (a,b) 上连续.

11. 设 $p(x)$ 为多项式，α 为 $p(x)=0$ 的 r 重实根. 证明 α 必定是 $p'(x)=0$ 的 $r-1$ 重实根.

12. 证明：设 f 为 n 阶可导函数，若方程 $f(x)=0$ 有 $n+1$ 个相异的实根，则方程 $f^{(n)}(x)=0$ 至少有一个实根.

13. 设 $a>0$. 证明函数 $f(x)=x^3+ax+b$ 存在唯一的零点.

14. 证明：$\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

15. 证明：若函数 f,g 在区间 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)>g'(x)$，$f(a)=g(a)$，则在 $(a,b]$ 上有 $f(x)>g(x)$.

1.

(1) f 在 $[0,\frac{1}{\pi}]$ 上连续，在 $(0,\frac{1}{\pi})$ 上可导，$f(0)=f(\frac{1}{\pi})=0$

由 Rolle 中值定理，$\exists\,\xi\in(0,\frac{1}{\pi})$ s.t. $f'(\xi)=0$

(2) $f'(x)=\begin{cases}-1, & x\in[-1,0)\\ 1, & x\in(0,1]\end{cases}$ ⇒ 故 $\forall x\in[-1,1]$，$f'(x)\neq 0$

2.

(1) 记 $f(x)=x^3-3x+c$，假设 $\exists\,x_1,x_2\in[0,1]$ s.t. $f(x_1)=f(x_2)$，则 $\exists\,\xi\in(x_1,x_2)$ s.t. $f'(\xi)=0$

$f'(x)=3(x^2-1)=0 \Rightarrow x=\pm1$，与 $\xi\in(0,1)$ 矛盾！

故 $[0,1]$ 上不存在两个实根

(2) 记 $f(x)=x^n+px+q$

I) 当 $2|n$ 时，假设 $\exists\,x_1,x_2,x_3$ s.t. $f(x_i)=0$，不妨设 $x_1<x_2<x_3$

则 $\exists\,\xi_1\in(x_1,x_2)$，$\xi_2\in(x_2,x_3)$ s.t. $f'(\xi_i)=0$

又 $f'(x)=nx^{n-1}+p$，$f'(x)=0 \Rightarrow x^{n-1}=-\frac{p}{n}$，$2\nmid n-1$，故 $f(x)=0$ 在 $\mathbb{R}$ 上只有唯一解 ⇒ 与 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$ 矛盾！

故当 $2|n$ 时，$f(x)=0$ 在 $\mathbb{R}$ 上至多有两个解

II) 当 $2\nmid n$ 时，类似可证，$f(x)=0$ 在 $\mathbb{R}$ 上至多有三个解

3.

推论 2　若函数 f 和 g 均在区间 I 上可导，且 $f'(x)\equiv g'(x), x\in I$，则在区间 I 上 $f(x)$ 与 $g(x)$ 只相差某一常数，即
$$f(x)=g(x)+c\quad(c\text{ 为某一常数}).$$

记 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F'(x)=f'(x)-g'(x)\equiv 0 \Rightarrow F(x)=c \Rightarrow f(x)=g(x)+c$

4.

(1) $\exists\,\xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$f'(\xi)\geq m \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geq m \Rightarrow f(b)\geq f(a)+m(b-a)$

(2) $\exists\,\xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$|f'(x)|\leq M \Rightarrow \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\leq M \Rightarrow |f(b)-f(a)|\leq M|b-a|$

(3) 记 $f(x)=\sin x$，$f'(x)=\cos x\leq 1$

由 (2) 可知，$|\sin x_1-\sin x_2|\leq|x_1-x_2|$

5.

(1) 记 $f(x)=\ln x$，$f'(x)=\frac{1}{x}$

则 $\exists\,\xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \ln\frac{b}{a}=\frac{b-a}{\xi}=\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$

(2) 记 $f(x)=\arctan h$，$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

则 $\exists \xi \in (0,h)$ s.t. $f'(\xi)=\frac{f(h)-f(0)}{h-0} \Rightarrow \arctan h = \frac{h}{1+\xi^2} \Rightarrow \frac{h}{1+h^2} < \arctan h < h$

6.

(1) $f'(x)=-2x+3$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{3}{2})\downarrow$, $(\frac{3}{2},+\infty)\uparrow$

(2) $f'(x)=\frac{(2x+1)(2x-1)}{x}$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{1}{2})\uparrow$, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\downarrow$, $(\frac{1}{2},+\infty)\uparrow$

(3) $f'(x)=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, $x\in[0,2]$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,1)\uparrow$, $(1,2)\downarrow$

(4) $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}^*$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty,-1)\uparrow$, $(-1,0)\downarrow$, $(0,+\infty)\uparrow$

7.

(1) 记 $f(x)=\tan x+\frac{x^3}{3}-x$, $x\in(0,\frac{\pi}{2}) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+x^2-1$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})\uparrow \Rightarrow f(x)>f(0)=0 \Rightarrow \tan x > x-\frac{x^3}{3}$

(2) 记 $f(x)=x-\sin x$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, $g(x)=\sin x-\frac{2x}{\pi}$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$f'(x)=1-\cos x>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})\uparrow \Rightarrow f(x)>f(0)=0 \Rightarrow x>\sin x$

$g'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$, $\Rightarrow \exists x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$ s.t. $g'(x_0)=0 \Rightarrow g(x)$ 在 $(0,x_0)\uparrow$, $(x_0,\frac{\pi}{2})\downarrow$

又 $g(0)=g(\frac{\pi}{2})=0 \Rightarrow g(x)>0 \Rightarrow \sin x>\frac{2x}{\pi}$

综上, $\frac{2x}{\pi}<\sin x<x$

(3) 记 $f(x)=x-\frac{x^2}{2(1+x)}-\ln(1+x)$, $x>0$, $g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$, $x>0$

$f'(x)=\frac{x^2-x+1}{x+1}>0 \Rightarrow f(x)>f(0)=0 \Rightarrow x-\frac{x^2}{2(1+x)}>\ln(1+x)$

$g'(x)=\frac{x^2}{x+1}>0 \Rightarrow g(x)>g(0)=0 \Rightarrow \ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$

8. $S(x)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ x & f(x) & 1\end{vmatrix}\right|$, $S'(x)=\frac{1}{2}\left|(b-a)f'(x)-(f(b)-f(a))\right|$

$S(a)=S(b)=0$

$\Rightarrow$ 由Rolle中值定理得, $\exists \xi\in(a,b)$ s.t. $S'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

9. 由Lagrange中值定理得, $\exists \xi_1\in(a,c)$, $\xi_2\in(c,b)$ s.t. $f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$, $f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0$

由Lagrange中值定理得, $\exists \xi\in(\xi_1,\xi_2)$ s.t. $f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0$

10. 不妨设 $f'(x)$ 单增

假设 $\exists x_0\in(a,b)$ s.t. $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)\neq f'(x_0)$

记 $A=\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$, $B=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$, 则 $f'(x)$ 单增 $\Rightarrow A<B \Rightarrow \forall x\in(a,b)$, $f'(x)\neq\frac{A+B}{2}$

则 $\exists x_1\in \mathring{U}_-(x_0)$, $x_2\in\mathring{U}_+(x_0)$ s.t. $f'(x_1)<A$, $f'(x_2)>B \Rightarrow \frac{A+B}{2}\in(f'(x_1),f'(x_2))$

由Darboux定理得: $\exists \xi\in(x_1,x_2)$ s.t. $f(\xi)=\frac{A+B}{2}$, 与 $\forall x\in(a,b)$, $f'(x)\neq\frac{A+B}{2}$ 矛盾!

故 $f'(x)$ 在 (a,b) 上连续

11. 设 $p(x)\in\mathbb{R}[x]_n$ $(n>r)$, 则 $p(x)=a_{n-1}\left[(x-\alpha)^r\left(\prod_{i=1}^{n-r-1}(x-\alpha_i)\right)\right]$

$p'(x)=a_{n-1}\left[(x-\alpha)^{r-1}\left(\prod_{i=1}^{n-r-1}(x-\alpha_i)\right)+(x-\alpha)^r\sum_{i=1}^{n-r-1}\prod_{j\neq i}(x-\alpha_j)\right]=a_{n-1}(x-\alpha)^{r-1}\left[\left(\prod_{i=1}^{n-r-1}(x-\alpha_i)\right)+(x-\alpha)\sum_{i=1}^{n-r-1}\prod_{j\neq i}(x-\alpha_j)\right]$

故 α 是 $p'(x)=0$ 的 $r-1$ 重实根

12. 设 $f(x)=0$ 的 $n+1$ 个相异的实根为 $x_0,x_1,\dots,x_n$, 不妨设 $x_0<x_1<\dots<x_n$

由Rolle中值定理得, $\exists \xi_1,\dots,\xi_n$ 满足 $x_0<\xi_1<x_1<\dots<\xi_n<x_n$ s.t. $f'(\xi_i)=0$

归纳即证

13. 假设 $\exists x_1,x_2$ s.t. $f(x_1)=f(x_2)=0$

不妨设 $x_1<x_2$, 则由Rolle中值定理得, $\exists \xi\in(x_1,x_2)$ s.t. $f'(\xi)=0$

又 $f'(x)=3x^2+a$, $a>0 \Rightarrow f'(x)=0$ 在 $\mathbb{R}$ 上无实根, 与 $f'(\xi)=0$ 矛盾!

故 $f(x)$ 至多有一个零点

又 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，由介值性定理得，$\exists x_0$ s.t. $f(x_0)=0$

综上即证

14. $\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x} \Leftrightarrow \sin x \tan x - x^2 = 0$

记 $f(x)=\sin x \tan x - x^2$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$f'(x)=\sin x+\frac{\sin x}{\cos^2 x}-2x$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$f''(x)=\cos x+\frac{1}{\cos x}+\frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x}-2$

$f'''(x)=\sin x(\frac{1}{\cos^2 x}-1)+\frac{4\sin x\cos^2 x+3\sin^2 x}{\cos^4 x}$

$f'''(x)>0 \Rightarrow f''(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})\nearrow$

$f''(0)=0 \Rightarrow f''(x)>0 \Rightarrow f'(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})\nearrow$

$f'(0)=0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$

$f(0)=0 \Rightarrow f(x)>0$

15. 记 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(a)=0$, $F'(x)=f'(x)-g'(x)>0 \Rightarrow F(x)$ 在 $(a,b)\nearrow$

$\Rightarrow \forall x\in(a,b]$, $F(x)>F(a)=0 \Rightarrow f(x)>g(x)$

习 题 6.2

1. 试问函数 $f(x)=x^2, g(x)=x^3$ 在区间 $[-1,1]$ 上能否应用柯西中值定理得到相应的结论，为什么？

2. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导。证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得
$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

3. 设函数 f 在点 a 处具有连续的二阶导数。证明：
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a).$$

4. 设 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$。证明存在 $\theta\in(\alpha,\beta)$，使得
$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\cot\theta.$$

5. 求下列不定式极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x-6}{\sec x+5}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}(\tan x)^{\sin x}$；　(8) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$；　(10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x$；

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$；　(12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$。

6. 设函数 f 在点 a 的某个邻域上具有二阶导数。证明：对充分小的 h，存在 θ，$0<\theta<1$，使得
$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\frac{f''(a+\theta h)+f''(a-\theta h)}{2}.$$

7. 求下列不定式极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)^{(1+x)}}{x^2}-\frac{1}{x}\right)$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$；　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$。

8. 设 $f(0)=0$，f' 在原点的某邻域上连续，且 $f'(0)\neq 0$。证明：
$$\lim_{x\to 0^+}x^{f(x)}=1.$$

9. 证明定理 6.7 中 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ 情形时的洛必达法则。

10. 证明：$f(x)=x^3e^{-x^2}$ 为有界函数。

---

1. 不能

$f'(0)=g'(0)=0$

2. 记 $F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}\cdot(x^2-a^2)\Rightarrow F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}\cdot(2x)$

则 $F(a)=F(b)=0$，由 Rolle 中值定理得，$\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $F'(\xi)=0\Rightarrow 2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$

3. $f''(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h^2}-\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$

4. 记 $f(x)=\sin x$，$g(x)=-\cos x\Rightarrow f'(x)=\cos x$，$g'(x)=\sin x$

由 Cauchy 中值定理得，$\exists\theta\in(\alpha,\beta)$ s.t. $\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{g(\alpha)-g(\beta)}=\frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}$

$\Rightarrow\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\sin\beta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$

5.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{-2\cos x}{-3\sin x}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{-\cos x}=1$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\cos^3 x}=2$

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x-6}{\sec x+5}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}=1$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{(x+1)e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\ln\tan x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}=0$

$\lim\limits_{x\to 0}(\tan x)^{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin x\ln\tan x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x\ln\tan x}=1$

(8) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}-\frac{1}{x}=-1$

$\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{\ln x}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}}=e^{-1}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{1+x^2}=0$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1+x^2)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}}=e^0=1$

(10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\sin x=\sin\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\right)=0$

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2}{12x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-4\sin 2x}{24x}=\left(-\frac{1}{6}\right)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=-\frac{1}{6}$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\tan x-\ln x}{x^2}=\frac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln\tan x-\ln x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\tan x-\ln x}{x^2}}=e^{\frac{1}{3}}$

6. 记 $g(x)=f(a+x)+f(a-x)\Rightarrow g'(x)=f'(a+x)-f'(a-x)$，$g''(x)=f''(a+x)+f''(a-x)$

则 $\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\frac{g(h)-g(0)}{h^2}$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{g'(h)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{g'(h)-\overset{=0}{g'(0)}}{2h}$

由 Lagrange 定理得, $\exists \theta \in (0,1)$ s.t. $g'(h)-g'(0)=h g''(\theta h) \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h g''(\theta h)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{g''(\theta h)}{2}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f''(a+\theta h)+f''(a-\theta h)}{2}$

7.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-\tan(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-\sec^2(x-1)}{\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi x}{2}}=-\frac{4}{\pi^2}$

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\pi-2\arctan x}{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x(\ln x)^2}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)^2+2\ln x}{2x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x+1}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)(\ln x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}-\frac{(\cos x)(\ln x)^2}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}-2x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{(\sin x)(\ln x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)(\ln x)}=e^0=1$

(4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\tan 2x)\ln\tan x=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{\tan 2x}}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}-\sin 2x=-1$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}e^{(\tan 2x)\ln\tan x}=e^{\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\tan 2x)\ln\tan x}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)^{(1+x)}}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)^{(1+x)}-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{2}=\frac{1}{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cos x}{2\cos x-x\sin x}=0$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{2(1+x^2)}=-\frac{e}{2}$

(8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{-\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{-1-x^2}{x^2}=-1$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}e^{\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

8. $\lim\limits_{x\to 0^+}x(\ln x)^2=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{-\frac{1}{x(\ln x)^2}}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{f(x)\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\ln x}=e^0=1$

9. 令 $t=\frac{1}{x}$, 记 $F(t)=f(x)$, $G(t)=g(x)$

则 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

10. $f(x)=x^3e^{-x^2}\Rightarrow f'(x)=x^2(3-2x^2)e^{-x^2}$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}})\downarrow(-\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}})\uparrow(\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty)\downarrow$

$\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x^2}{x^2e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3}{e^{x^2}}=0$

$f(-\sqrt{\frac{3}{2}})=-(\frac{3}{2})^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}$, $f(\sqrt{\frac{3}{2}})=(\frac{3}{2})^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x^2}{x^2e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3}{e^{x^2}}=0$

故 $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f(x)|\le(\frac{3}{2})^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}$, 即 $f(x)$ 有界

习 题 6.3

1. 求下列函数带佩亚诺型余项的麦克劳林公式:

(1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$;

(2) $f(x)=\arctan x$ 到含 x^5 的项;

(3) $f(x)=\tan x$ 到含 x^5 的项.

2. 按例 4 的方法求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$;　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$.

3. 求下列函数在指定点处带拉格朗日余项的泰勒公式:

(1) $f(x)=x^3+4x^2+5$, 在 $x=1$ 处;　(2) $f(x)=\frac{1}{1+x}$, 在 $x=0$ 处.

4. 估计下列近似公式的绝对误差:

(1) $\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$, 当 $|x|\leqslant\frac{1}{2}$;　(2) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$, $x\in[0,1]$.

5. 计算: (1) 数 e 准确到 10^{-9};

(2) lg 2.7 准确到 10^{-5}.

1.

(1) $f(x)=(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_{\alpha}^{k}x^k+o(x^n)$

(2) $f(x)=\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)$

(3) $f(x)=\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)$

2.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)-x-x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-(x-\frac{1}{2}+o(1))\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{2}-o(1))=\frac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{x}-\cot x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{x}-(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3+o(x^3))=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{3}+o(x))=\frac{1}{3}$

3.

(1) $f(x)=x^3+4x^2+5$, $f'(x)=3x^2+8x$, $f''(x)=6x+8$, $f'''(x)=6$

$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+f''(1)(x-1)^2+f'''(1)(x-1)^3=10+11(x-1)+14(x-1)^2+6(x-1)^3$

(2) $f(x)=(1+x)^{-1}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_{-1}^{k}x^k+o(x^n)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kx^k+o(x^n)$

4. 略

5. 略

习 题 6.4

1. 求下列函数的极值：

(1) $f(x)=2x^3-x^4$；　　(2) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$；

(3) $f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$；　　(4) $f(x)=\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

2. 设

$$f(x)=\begin{cases}x^4\sin^2\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

(1) 证明：$x=0$ 是极小值点；

(2) 说明 f 在极小值点 $x=0$ 是否满足极值的第一充分条件或第二充分条件.

3. 证明：若函数 f 在点 x_0 有 $f'_+(x_0)<0\ (>0)$，$f'_-(x_0)>0\ (<0)$，则 x_0 为 f 的极大(小)值点.

4. 求下列函数在给定区间上的最大、最小值：

(1) $y=x^5-5x^4+5x^3+1$，$[-1,2]$；　　(2) $y=2\tan x-\tan^2 x$，$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$；

(3) $y=\sqrt{x}\ln x$，$(0,+\infty)$.

5. 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，并且在 I 上仅有唯一的极值点 x_0. 证明：若 x_0 是 f 的极大(小)值点，则 x_0 必是 $f(x)$ 在 I 上的最大(小)值点.

6. 把长为 l 的线段截为两段，问怎样截能使以这两段线为边所组成的矩形的面积最大？

7. 有一个无盖的圆柱形容器，当给定体积为 V 时，要使容器的表面积为最小，问底的半径与容器高的比例应该怎样？

8. 设用某仪器进行测量时，读得 n 次实验数据为 $a_1a_2,\cdots,a_n$. 问以怎样的数值 x 表达所要测量的真值，才能使它与这 n 个数之差的平方和为最小？

9. 求一正数 a，使它与其倒数之和最小.

10. 求下列函数的极值：

(1) $f(x)=|x(x^2-1)|$；　　(2) $f(x)=\dfrac{x(x^2+1)}{x^4-x^2+1}$；

(3) $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$.

11. 设 $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ 在 $x_1=1$，$x_2=2$ 处都取得极值，试求 a 与 b；并问这时 f 在 x_1 与 x_2 是取得极大值还是极小值？

12. 在抛物线 $y^2=2px$ 上哪一点的法线被抛物线所截之线段为最短？

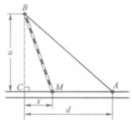


图 6-11

13. 要把货物从运河边上 A 城运往与运河相距为 $BC=a$ km 的 B 城(见图 6-11)，轮船运费的单价是 α 元/km，火车运费的单价是 β 元/km$(\beta>\alpha)$，试求运河边上的一点 M，修建铁路 MB，使得 $A\to M\to B$ 的总运费最省.

1.

(1) $f'(x)=6x^2-4x^3$, $f''(x)=12x-12x^2$, $f'''(x)=12-24x$

$f'(0)=0$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=12 \Rightarrow x=0$ 处不为极值

$f'(\frac{3}{2})=0$, $f''(\frac{3}{2})=-9 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$ 处取极大值

(2) $f'(x)=\frac{2-4x^2}{(1+x^2)^2}$, $f''(x)=\frac{4x^3-12x}{(1+x^2)^3}$

$f'(-\frac{\sqrt{2}}{2})=0$, $f''(-\frac{\sqrt{2}}{2})>0 \Rightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取极小值

$f'(\frac{\sqrt{2}}{2})=0$, $f''(\frac{\sqrt{2}}{2})<0 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取极大值

(3) $f'(x)=\frac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}$, $f''(x)=\frac{2(\ln x)^2-6\ln x+2}{x^3}$

$f'(1)=0$, $f''(1)>0 \Rightarrow x=1$ 处取极小值

$f'(e^2)=0$, $f''(e^2)<0 \Rightarrow x=e^2$ 处取极大值

(4) $f'(x)=\frac{1-x}{1+x^2}$, $f''(x)=\frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$

$f'(1)=0$, $f''(1)<0 \Rightarrow x=1$ 处取极大值

2.

(1) $\forall x\in U^\circ(0)$, $f(x)>0=f(0) \Rightarrow x=0$ 处取极小值

(2) $f'(x)=2x^2\sin\frac{1}{x}(2\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}) \Rightarrow$ 不满足第一充分条件

$f''(0)=0 \Rightarrow$ 不满足第二充分条件

3. $f'_+(x_0)<0 \Rightarrow$ 由保号性可知，$\exists\delta_1>0$ s.t. $\forall x\in U^\circ_+(x_0;\delta_1)$, $f'(x)<0 \Rightarrow \forall x\in U^\circ_+(x_0;\delta_1)$, $f(x)<f(x_0)$

同理，$\exists\delta_2>0$ s.t. $\forall x\in U^\circ_-(x_0;\delta_2)$, $f(x)<f(x_0)$

$\Rightarrow \exists\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0;\delta)$, $f(x)<f(x_0) \Rightarrow$ 在 $x=x_0$ 处取极大值

4.

(1) $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+1$, $x\in[-1,2] \Rightarrow f'(x)=5x^4-20x^3+15x^2$, $x\in[-1,2]$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(-1,1)\nearrow$ $(1,2)\searrow$

$\Rightarrow f_{max}=f(1)=2$, $f_{min}=\min\{f(-1),f(2)\}=f(-1)=-10$

(2) $f(x)=2\tan x-\tan^2 x$, $x\in[0,\frac{\pi}{2})$

令 $t=\tan x\in[0,+\infty)$, 则 $f(x)=g(t)=2t-t^2$, $t\in[0,+\infty) \Rightarrow g'(t)=2-2t$, $t\in[0,+\infty)$

$\Rightarrow g(t)$ 在 $(0,1)\nearrow$ $(1,+\infty)\searrow$

$\Rightarrow g_{max}=g(1)=1 \Rightarrow f_{max}=f(\frac{\pi}{4})=1$

又 $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=-\infty$, 故 g 无最小值 $\Rightarrow f$ 无最小值

(3) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}\ln x$, $x\in(0,+\infty) \Rightarrow f'(x)=x^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}\ln x+1)$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(0, e^{-2}) \downarrow$ $(e^{-2}, +\infty) \uparrow$

$\Rightarrow f_{min} = f(e^{-2}) = -2e^{-1}$，$f$ 无最大值

5. 假设 $\exists x_1 \in I$ s.t. $f(x_0) < f(x_1)$，不妨设 $x_0 < x_1$

f 在 $x = x_0$ 处取得极大值 $\Rightarrow \exists \delta > 0$ s.t. $f(x_0) > f(x_0 + \delta)$

由介值性定理，$\exists x_2 \in (x_0+\delta, x_1)$ s.t. $f(x_2) = f(x_0)$

由Rolle中值定理得，$\exists \xi \in (x_0, x_2)$ s.t. $f'(\xi) = 0$

记 $A = \{\xi \mid \xi \in (x_0, x_2) \wedge f'(\xi) = 0\}$，则 A 非空

假设 $\forall \xi \in A$，ξ 不是极值点，则 f 在 $(x_0, x_2) \downarrow$，与 $f(x_0) = f(x_2)$ 矛盾！

故 $\exists \xi \in A$ s.t. f 在 $x = \xi$ 处取极值，与题设矛盾！

故 $\forall x \in I$，$f(x_0) \geq f(x)$

6. $S(x) = x(\ell - x)$，$S_{max} = S(\frac{\ell}{2}) = \frac{\ell^2}{4}$

7. 记 $\frac{r}{h} = k$，则 $S(k) = \pi^{\frac{2}{3}} V^{\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{3}}(k+1)$，$S_{min} = S(1) = 2\pi^{\frac{2}{3}} V^{\frac{1}{3}}$

8. $f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2 \Rightarrow f'(x) = 2\sum_{i=1}^{n} (x - a_i)$

$\Rightarrow f_{min} = f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i)$

故 $x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$

9. $f(x) = x + \frac{1}{x}$，$x > 0 \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$，$x > 0$

$\Rightarrow f_{min} = f(1) = 2 \Rightarrow a = 1$

10.

(1) 极小值：$f(-1) = f(0) = f(1) = 0$

极大值：$f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

(2) $f(x) = \frac{x(x^3+1)}{x^4 - x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-(x^2-1)(x^4+5x+1)}{(x^4 - x^2 + 1)^2}$

极小值：$f(-1) = -2$

极大值：$f(1) = 2$

(3) $f(x) = (x-1)^2(x+1)^3 \Rightarrow f'(x) = (x+1)^2(x-1)(5x-1)$

极小值：$f(1) = 0$

极大值：$f(\frac{1}{5}) = \frac{3456}{3125}$

11. $f'(x) = \frac{2bx^2 + x + a}{x}$

$f'(x_1) = f'(x_2) = 0 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$，$b = -\frac{1}{6}$

此时 $f''(1) > 0$，$f''(2) < 0 \Rightarrow f$ 在 $x = 1$ 取得极小值，在 $x = 2$ 处取得极大值

12. $(p, \pm\sqrt{2}p)$

13. 距 C 点 $\frac{a\alpha}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$ km 处

习 题 6.5

1. 确定下列函数的凸性区间与拐点：

(1) $y=2x^3-3x^2-36x+25$；　(2) $y=x+\frac{1}{x}$；

(3) $y=x^2+\frac{1}{x}$；　(4) $y=\ln(x^2+1)$；

(5) $y=\frac{1}{1+x^2}$.

2. 问 a 和 b 为何值时，点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

3. 证明：

(1) 若 f 为凸函数，λ 为非负实数，则 λf 为凸函数；

(2) 若 f,g 均为凸函数，则 $f+g$ 为凸函数；

(3) 若 f 为区间 I 上凸函数，g 为 $J\supset f(I)$ 上凸增函数，则 $g\circ f$ 为 I 上凸函数.

4. 设 f 为区间 I 上严格凸函数. 证明：若 $x_0\in I$ 为 f 的极小值点，则 x_0 为 f 在 I 上唯一的极

5. 应用凸函数概念证明如下不等式：

(1) 对任意实数 a,b，有 $e^{\frac{a+b}{2}}\leqslant\frac{1}{2}(e^a+e^b)$；

(2) 对任何非负实数 a,b，有 $2\arctan\left(\frac{a+b}{2}\right)\geqslant\arctan a+\arctan b$.

6. 证明：$\sin\pi x\leqslant\frac{\pi^2}{2}x(1-x)$，其中 $x\in[0,1]$.

7. 证明：若 f,g 均为区间 I 上凸函数，则 $F(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 也是 I 上凸函数.

8. 证明：(1) f 为区间 I 上凸函数的充要条件是对 I 上任意三点 $x_1<x_2<x_3$，恒有

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & x_1 & f(x_1)\\ 1 & x_2 & f(x_2)\\ 1 & x_3 & f(x_3)\end{vmatrix}\geqslant 0;$$

(2) f 为严格凸函数的充要条件是 $\Delta>0$.

9. 应用延森不等式证明：

(1) 设 $a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n};$$

(2) 设 $a_i,b_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，有

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $p>1,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

10. 求证：圆内接 n 边形的面积最大者必为正 n 边形 $(n\geqslant 3)$.

1.

(1) $f(x)=2x^3-3x^2-36x+25\Rightarrow f'(x)=6x^2-6x-36$，$f''(x)=12x-6$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上凸，拐点为 $x=2$

(2) $f(x)=x+\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$，$f''(x)=\frac{2}{x^3}$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上凸，拐点不存在

(3) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}\Rightarrow f(x)=2x-\frac{1}{x^2}$，$f''(x)=2+\frac{2}{x^3}$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$ 上凸，拐点为 $x=-1$

(4) $f(x)=\ln(x^2+1)\Rightarrow f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$，$f''(x)=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上凸，拐点为 $x=-1$，$x=1$

(5) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow f(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$，$f''(x)=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}})$，$(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty)$ 上凸，拐点为 $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. $f(x)=ax^3+bx^2\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx$，$f''(x)=6ax+2b$

$f(1)=3$，$f''(1)=0\Rightarrow a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{2}$

3.

(1) $f''\geq 0\Rightarrow(\lambda f)''=\lambda f''\geq 0\Rightarrow\lambda f$ 为凸函数

(2) $f''\geq 0$，$g''\geq 0\Rightarrow(f+g)''=f''+g''\geq 0\Rightarrow f+g$ 为凸函数

(3) $f''(x)\geq 0$，$g''(u)\geq 0\Rightarrow(g\circ f)''(x)=g''(f'(x))f''(x)\geq 0\Rightarrow g\circ f$ 为凸函数

4. $f''(x)>0$，$f'(x_0)=0\Rightarrow\forall x<x_0$，$f'(x)<0$；$\forall x>x_0$，$f'(x)>0\Rightarrow x_0$ 为唯一极小值点

5.

(1) 令 $f(x)=e^x$，$f''(x)=e^x>0\Rightarrow f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上凸

$\Rightarrow\forall a,b$，$f(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b)\leq\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)\Rightarrow e^{\frac{a+b}{2}}\leq\frac{1}{2}(e^a+e^b)$

(2) 令 $f(x)=\arctan x$，$x\geq 0$，$f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\leq 0\Rightarrow f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上凹

$\Rightarrow\forall a,b\geq 0$，$f(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b)\geq\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)\Rightarrow 2\arctan(\frac{a+b}{2})\geq\arctan a+\arctan b$

6. 记 $f(x)=\frac{\pi^2}{2}x(1-x)-\sin\pi x$，$x\in[0,1]$

$f'(x)=\pi(\frac{\pi}{2}-\pi x-\cos\pi x)$，$x\in[0,1]$

$f''(x)=\pi^2(\sin\pi x-1)$，$x\in[0,1]$

$f''(x)\leq 0\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,1)$ 上凹 $\Rightarrow\forall x\in(0,1)$，$f(x)\geq(1-x)f(0)+xf(1)=0$

变形即证.

7. f,g 在 I 上凸 $\Rightarrow\forall x_1,x_2\in I$，$\lambda\in(0,1)$，$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\leq\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)$，$g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq\lambda g(x_1)+(1-\lambda)g(x_2)\leq\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)$

$F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)\Rightarrow F$在$I$上凸

8.

(1) $\Delta=\begin{vmatrix}1&x_1&f(x_1)\\1&x_2&f(x_2)\\1&x_3&f(x_3)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&x_1&f(x_1)\\0&x_2-x_1&f(x_2)-f(x_1)\\0&x_3-x_2&f(x_3)-f(x_2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_2-x_1&f(x_2)-f(x_1)\\x_3-x_2&f(x_3)-f(x_2)\end{vmatrix}=(x_2-x_1)(f(x_3)-f(x_2))-(x_3-x_2)(f(x_2)-f(x_1))\ge0$

$\Leftrightarrow\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\ge\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\Leftrightarrow f$在$I$上凸

(2)类似(1)即证

9.

(1) 易知$\ln x$在$(0,+\infty)$上凹$\Rightarrow\ln\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}a_i\right)\ge\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}\ln a_i\Rightarrow\ln\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}\ge\ln\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}}\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}\ge\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}}$

同理 $\ln\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{a_i}\right)\ge\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}\ln\frac{1}{a_i}\Rightarrow\ln\frac{\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}}{n}\ge\ln\left(\frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i}\right)^{\frac{1}{n}}\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}}{n}\ge\left(\frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i}\right)^{\frac{1}{n}}\Rightarrow\frac{n}{\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}}\le\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}}$

综上即证

(2) 令$f(x)=x^{\frac{1}{q}}$，易知$f(x)$在$(0,+\infty)$上为凹函数

令$t_i=\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}$，$x_i=\frac{b_i^q}{a_i^p}$，则有$f\left(\sum_{i=1}^n t_ix_i\right)\ge\sum_{i=1}^n t_if(x_i)$

代入整理即得.

10. 显然圆心在n边形内时面积取得最大值，否则可以移动圆上一点使n边形面积增大.

设n边形为$A_1A_2\cdots A_n$，记$\theta_i=\angle A_iOA_{(i+1)\bmod n}$

则$S=\frac{1}{2}r^2\sum_{i=1}^n\sin\theta_i=\frac{nr^2}{2}\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}\sin\theta_i$

由Jensen不等式得，$S=\frac{nr^2}{2}\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}\sin\theta_i\le\frac{nr^2}{2}\sin\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}\cdot\theta_i\right)=\frac{nr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$，当且仅当$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n$时取等

即证

习　题　6.6

按函数作图步骤，作下列函数图像：

(1) $y=x^3+6x^2-15x-20$;　　(2) $y=\frac{x^3}{2(1+x)^2}$;

(3) $y=x-2\arctan x$;　　(4) $y=xe^{-x}$;

(5) $y=3x^5-5x^3$;　　(6) $y=e^{-x^2}$;

(7) $y=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$;　　(8) $y=|x|^{\frac{2}{3}}(x-2)^2$.

略

习　题　6.7

1. 求$\frac{x^3}{3}-x^2+2=0$的实根，精确到三位有效数字.
2. 求方程$x=0.538\sin x+1$的根的近似值，精确到0.001.

1. $x \approx -1.20$

2. $x \approx 1.538$

第六章总练习题

1. 证明：若 $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 上可导，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

2. 证明：若 $x>0$，则

(1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$，其中 $\dfrac{1}{4}\leqslant\theta(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

3. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $a\cdot b>0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

4. 设 f 在 $[a,b]$ 上三阶可导，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi).$$

5. 对 $f(x)=\ln(1+x)$ 应用拉格朗日中值定理，试证：对 $x>0$，有

$$0<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<1.$$

6. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个正数，且

$$f(x)=\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

证明：(1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

7. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x^2)^{1/\ln(1-x)}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

8. 设 $h>0$，函数 f 在 $U(a;h)$ 上具有 $n+2$ 阶连续导数，且 $f^{(n+2)}(a)\neq 0$，f 在 $U(a;h)$ 上的泰勒公式为

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1},0<\theta<1.$$

证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+2}$.

9. 设 $k>0$，试问 k 为何值时，方程 $\arctan x-kx=0$ 有正实根.

10. 证明：对任一多项式 $p(x)$，一定存在 x_1 与 x_2，使 $p(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 与 $(x_2,+\infty)$ 上分别严格单调.

11. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

(1) 在 $x=0$ 点是否可导？

(2) 是否存在 $x=0$ 的一个邻域，使 f 在该邻域上单调？

12. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f'(a)=f'(b)=0$. 证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

13. 设函数 f 在 $[0,a]$ 上具有二阶导数，且 $|f''(x)|\leqslant M$，f 在 $(0,a)$ 上取得最大值. 试证

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma.$$

14. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上可微，且 $0\leqslant f'(x)\leqslant f(x)$，$f(0)=0$. 证明：在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv 0$.

15. 设 $f(x)$ 满足 $f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$，其中 $g(x)$ 为任一函数. 证明：若 $f(x_0)=f(x_1)=0$ $(x_0<x_1)$，则 f 在 $[x_0,x_1]$ 上恒等于 0.

16. 证明：定圆内接正 n 边形面积将随 n 的增加而增加.

17. 证明：f 为 I 上凸函数的充要条件是对任何 $x_1,x_2\in I$，函数

$$\varphi(\lambda)=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$$

为 $[0,1]$ 上的凸函数

18. 证明：(1) 设 f 在 $(a,+\infty)$ 上可导，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 都存在，则

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0.$$

(2) 设 f 在 $(a,+\infty)$ 上 n 阶可导. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)$ 都存在，则

$$\lim_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0\ (k=1,2,\cdots,n).$$

19. 设 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的二阶可导函数. 若 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，则存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使 $f''(\xi)=0$.

---

1. 记 $g(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}f(x), & x=a\\ f(x), & x\in(a,b)\\ \lim\limits_{x\to b^-}f(x), & x=b\end{cases}$，则 $g(a)=g(b)$

由Rolle中值定理得，$\exists\,\xi\in(a,b)$ s.t. $g'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=0$

2.

(1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}\Rightarrow\theta(x)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{x}{2(\sqrt{x^2+x}+x)}\Rightarrow\theta(x)\in[\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}]$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}(\sqrt{x^2+x}-x)\right)=\tfrac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{x}{2(\sqrt{x^2+x}+x)}\right)=\dfrac{1}{2}$

3. 记 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，$G(x)=\dfrac{1}{x}$

由Cauchy中值定理得，$\exists\,\xi\in(a,b)$ s.t. $\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\dfrac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}$

代入变形即证

4. 记 $F(x)=f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)[f'(a)+f'(x)]$，$G(x)=(x-a)^3$

由Cauchy中值定理得，$\exists\,\xi'\in(a,b)$ s.t. $\dfrac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\dfrac{f(b)-f(a)-\frac{1}{2}(b-a)[f'(b)-f'(a)]}{(b-a)^3}=\dfrac{F'(\xi')}{G'(\xi')}=\dfrac{f'(\xi)-f'(a)-\frac{1}{2}(\xi'-a)f''(\xi)}{3(\xi'-a)^2}=\dfrac{F'(\xi')-F'(a)}{G'(\xi')-G'(a)}$

由Cauchy中值定理得，$\exists\,\xi\in(a,\xi')$ s.t. $\dfrac{F'(\xi')-F'(a)}{G'(\xi')-G'(a)}=\dfrac{F''(\xi)}{G''(\xi)}=\dfrac{-\frac{1}{2}(\xi-a)f'''(\xi)}{6(\xi-a)}=-\dfrac{1}{12}f'''(\xi)$

综上，$\exists\,\xi\in(a,b)$ s.t. $\dfrac{f(b)-f(a)-\frac{1}{2}(b-a)[f'(b)-f'(a)]}{(b-a)^3}=-\dfrac{1}{12}f'''(\xi)$，变形即证

5. $f(x)=\ln(1+x)$，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$

由Lagrange中值定理得，$\forall x>0$，$\exists\,\xi\in(0,x)$ s.t. $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\Rightarrow\ln(1+x)=\dfrac{x}{\xi}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\xi-1}{x}<\dfrac{x-1}{x}<1$

又 $\ln(1+x)<x\Rightarrow\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}>0$

综上即证

6.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{\sum_{i=1}^n a_i^x}{n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n}{\sum_{i=1}^n a_i^x}\cdot\dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n a_i^x\ln a_i\right)=\dfrac{\sum_{i=1}^n\ln a_i}{n}$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{\sum_{i=1}^n a_i^x}{n}}=e^{\frac{\sum_{i=1}^n\ln a_i}{n}}=\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}}$

(2) 不妨设 $a_1=\max\{a_1,a_2,\dots,a_3\}$

则 $f(x)=\left(\dfrac{\sum_{i=1}^n a_i^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=a_1\left(\dfrac{\sum_{i=1}^n(\frac{a_i}{a_1})^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}a_1\left(\dfrac{\sum_{i=1}^n(\frac{a_i}{a_1})^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}a_1\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=a_1$

即证

7.

(1) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln(1-x^2)}{\ln(1-x)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x^2)^{\frac{1}{\ln(1-x)}}=\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\frac{\ln(1-x^2)}{\ln(1-x)}}=e^{\frac{1}{2}}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)e^x-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+2)e^x+\frac{1}{(1+x)^2}}{2}=\dfrac{3}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\right)\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=1$

8. $f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\dfrac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}=f(a)+f'(a)h+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\dfrac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}h^{n+1}+\dfrac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}h^{n+2}+o(h^{n+2})$

$\Rightarrow\dfrac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}=\dfrac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}h^{n+1}+\dfrac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}h^{n+2}+o(h^{n+2})$

$\Rightarrow\dfrac{f^{(n+1)}(a+\theta h)-f^{(n+1)}(a)}{\theta h}=\dfrac{f^{(n+2)}(a)}{\theta(n+2)}+\dfrac{o(h)}{h}$

两边取极限 $h\to0$，得 $f^{(n+2)}(a)=\dfrac{f^{(n+2)}(a)}{\theta(n+2)}\Rightarrow\lim\limits_{h\to0}\theta=\dfrac{1}{n+2}$

9. 记 $f(x)=\arctan x-kx,\ x>0$

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-k,\ x>0$

I) $k\geq1\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f(x)<f(0)=0$

故此时无正实根

II) $k\in(0,1)\Rightarrow f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\frac{1-k}{k}}\right)\nearrow\left(\sqrt{\frac{1-k}{k}},+\infty\right)\searrow$

故此时有正实根

III) $k\leq0\Rightarrow f'(x)\geq0\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,+\infty)\nearrow$

故此时无正实根

综上，当 $k\in(0,1)$ 时，方程有正实根

10. 设 $p(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$

I) $n=1$

$p'(x)=a_1\Rightarrow p(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调，任取 x_1,x_2 皆成立

II) $n\geq2\wedge2\mid n$

$p'(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}ka_kx^{k-1}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}p'(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}p'(x)=+\infty$

$\Rightarrow\exists x_1,x_2\in\mathbb{R}$ s.t. $\forall x\in(-\infty,x_1),\ p'(x)<0,\ \forall x\in(x_2,+\infty),\ p'(x)>0$，即证.

III) $n\geq2\wedge2\nmid n$

$p'(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}ka_kx^{k-1}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}p'(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}p'(x)=+\infty$

$\Rightarrow\exists x_1,x_2\in\mathbb{R}$ s.t. $\forall x\in(-\infty,x_1),\ p'(x)>0,\ \forall x\in(x_2,+\infty),\ p'(x)>0$，即证.

11.

(1) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)=0,\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)=0$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$

(2) $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}+\sqrt{4x^2+1}\sin\left(\frac{1}{x}+\varphi\right), & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$

$\Rightarrow\forall\delta>0,\ \exists x_1,x_2\in(0,\delta)$ s.t. $\sin\left(\frac{1}{x_1}+\varphi\right)=1,\ \sin\left(\frac{1}{x_2}+\varphi\right)=-1$

$\Rightarrow f'(x_1)=\frac{1}{2}+\sqrt{4x_1^2+1}\geq\frac{1}{2}+1>0,\ f'(x_2)=\frac{1}{2}-\sqrt{4x_2^2+1}\leq\frac{1}{2}-1<0$

$\Rightarrow$ 不存在这样的邻域

12. $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=f(a)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}\cdot\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2=f(b)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}\cdot\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$

$\Rightarrow f(b)-f(a)=\dfrac{(b-a)^2}{8}\cdot\left(f''(\xi_2)-f''(\xi_1)\right)$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\left|f''(\xi_2)-f''(\xi_1)\right|=\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

不妨设 $|f''(\xi_1)|\leq|f''(\xi_2)|$，则 $\frac{1}{2}\left|f''(\xi_2)-f''(\xi_1)\right|\leq\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|+\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|\leq|f''(\xi_2)|$

故令 $\xi=\xi_2$，即有 $|f''(\xi)|\geq\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

13. $f'(a)=f'(0)+f''(\xi)a$

$\Rightarrow|f'(a)-f'(0)|=|f''(\xi)|a\leq Ma$

$\Rightarrow|f'(0)|+|f'(a)|\leq Ma$

14. 记 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}\leq0\Rightarrow g(x)\leq g(0)=0\Rightarrow f(x)\leq0$

又 $f(x)\geq0\Rightarrow f(x)\equiv0$

15. 假设 $f(x)\not\equiv0$，又 $f(x_0)=f(x_1)=0$，不妨设 $f(x)$ 在 (x_0,x_1) 上在 $x=\xi$ 处取得极大值

则 $f(\xi)>0$, $f'(\xi)=0$

又 $f''(\xi)+f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)=0 \Rightarrow f''(\xi)>0$，与 $x=\xi$ 处取得极大值矛盾！

故 $f(x)\equiv 0$

16. $S(n)=n\cdot\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}$，$n\geq 3$

$S'(n)=\cos\frac{2\pi}{n}(\tan\frac{2\pi}{n}-\frac{2\pi}{n})$，$n\geq 3$

$S'(n)>0 \Rightarrow S(n)$ 在 $(3,+\infty)\nearrow \Rightarrow$ 即证

17. $\Rightarrow)$ φ 在 $[0,1]$ 上凸 $\Rightarrow \varphi(\mu\lambda_1+(1-\mu)\lambda_2)\leq\mu\varphi(\lambda_1)+(1-\mu)\varphi(\lambda_2)$

令 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$，则有 $\varphi(\mu)=f(\mu x_1+(1-\mu)x_2)\leq\mu\varphi(1)+(1-\mu)\varphi(0)=\mu f(x_1)+(1-\mu)f(x_2)$

$\Rightarrow f$ 在 I 上凸

$\Leftarrow)$ f 在 I 上凸 $\Rightarrow f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$

$\Rightarrow f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=\varphi(\lambda)\leq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)=\lambda\varphi(1)+(1-\lambda)\varphi(0)$

$\Rightarrow \varphi$ 在 $[0,1]$ 上凸

18.

(1) 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则由 Cauchy 收敛准则得，$\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0$ s.t. $\forall x_1,x_2>x_0$, $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$，不妨设 $x_1<x_2-1$

又由 Lagrange 中值定理得，$\exists\xi\in(x_1,x_2)$ s.t. $f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

$\Rightarrow |f(x_2)-f(x_1)|=|x_2-x_1||f'(\xi)|<\varepsilon \Rightarrow |f'(\xi)|<\varepsilon$

假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\neq 0$，则与 $|f'(\xi)|<\varepsilon$ 矛盾！

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(2) 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)=B$

由 Taylor 公式得，$f(x+h)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\cdot h^k+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\cdot h^n$

令 $h=1,2,\dots,n$，并对两边取极限 $x\to+\infty$

得 $A=A+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\cdot 1^k+\frac{B}{n!}\cdot 1^n$

$A=A+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\cdot 2^k+\frac{B}{n!}\cdot 2^n$

$\dots$

$A=A+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\cdot n^k+\frac{B}{n!}\cdot n^n$

解方程组得，$f^{(k)}(x)=0$，$k=1,2,\dots,n$

19. 假设 $\forall x\in\mathbb{R}$, $f''(x)\neq 0$

则由 Dardoux 定理可知，$f''(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上正负性一致，不妨设 $f''(x)>0$

则易证其与 f 有界矛盾！

故 $\exists\xi\in\mathbb{R}$ s.t. $f''(\xi)=0$

习 题 7.1

1. 证明数集$\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}\right\}$有且只有两个聚点 $\xi_1=-1$ 和 $\xi_2=1$.

2. 证明：任何有限数集都没有聚点.

3. 设$\{(a_n,b_n)\}$是一个严格开区间套，即满足

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<b_n<\cdots<b_2<b_1,$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.证明：存在唯一的一点 ξ，使得

$$a_n<\xi<b_n, n=1,2,\cdots.$$

4. 试举例说明：在有理数集上，确界原理、单调有界定理、聚点定理和柯西收敛准则一般都不能成立.

5. 设 $H=\left\{\left(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}\right)\mid n=1,2,\cdots\right\}$.问

 (1) H 能否覆盖$(0,1)$?

 (2) 能否从 H 中选出有限个开区间覆盖(i)$\left(0,\frac{1}{2}\right)$，(ii)$\left(\frac{1}{100},1\right)$?

6. 证明：闭区间$[a,b]$的全体聚点的集合是$[a,b]$本身.

7. 设$\{x_n\}$为单调数列.证明：若$\{x_n\}$存在聚点，则必是唯一的，且为$\{x_n\}$的确界.

---

8. 试用有限覆盖定理证明聚点定理.

9. 试用聚点定理证明柯西收敛准则.

10. 用有限覆盖定理证明根的存在性定理.

11. 用有限覆盖定理证明连续函数的一致连续性定理.

1. 设 $x_n=-1+\frac{1}{2n-1}$，$y_n=1+\frac{1}{2n}$，则 $\{x_n\},\{y_n\}\subseteq\{(-1)^n+\frac{1}{n}\}$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=-1$，$\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=1\Rightarrow\xi_1=-1,\xi_2=1$ 为聚点

$\forall x\notin\{-1,1\}$，$\exists\delta>0$ s.t. $U(x;\delta)\cap\{(-1)^n+\frac{1}{n}\}=\varnothing$

故无其它聚点

综上即证

2. 设 $S=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$

假设对于有限数集 S，存在聚点 ξ

 则令 $\varepsilon=\max\limits_{i=1}^{n}|\xi-x_i|$，则 $U(\xi;\varepsilon)\cap S=S$

 但 S 为有限集，与 ξ 为聚点矛盾！

故有限数集不存在聚点

3. 令 $c_n=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$，$d_n=\frac{b_n+b_{n+1}}{2}$

$a_1<a_2<\cdots<a_n<b_n<\cdots<b_2<b_1\Rightarrow[c_n,d_n]\supseteq[c_{n+1},d_{n+1}]$，$0<d_n-c_n<b_n-a_n\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}(d_n-c_n)=0\Rightarrow\{[c_n,d_n]\}$ 是一个区间套

由区间套定理，存在唯一的 ξ 使得 $\forall n$，$c_n<\xi<d_n\Rightarrow a_n<\xi<b_n$

即证

4.

(1) 设 $S=\{x\mid x<\sqrt{2},x\in Q\}$，则 S 有上界 $2\in Q$.

又 $\sqrt{2}\notin Q$，故 S 无上确界

(2) 设 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$，则 $x_n<3$，且 $x_n<x_{n+1}$

又 $e\notin Q$，故 $\{x_n\}$ 无极限

(3) 设 $S=\{(1+\frac{1}{n})^n\mid n\in N^+\}$，则 $\forall x\in S$，$2\leq x<3$

又 $e\notin Q$，故 S 无聚点

(4) 设 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$ s.t. $\forall m,n>N$，$|x_m-x_n|<\varepsilon$

又 $e\notin Q$，故 $\{x_n\}$ 无极限

5.

(1) $\forall x\in(0,1)$，$\exists n\in N^+$ s.t. $\frac{1}{n+2}<x<\frac{1}{n}$

故 H 能覆盖 $(0,1)$

(2)

(i) 设 $H'=\{(\frac{1}{n_i+2},\frac{1}{n_i})\mid i=1,2,\dots,m\}$，不妨设 $n_1<n_2<\cdots<n_m$

$\exists x=\frac{1}{n_1+3}\in(0,\frac{1}{2})$ s.t. $x\in H$，$\forall i$，$x\notin(\frac{1}{n_i+2},\frac{1}{n_i})$

故不能选出有限个开区间覆盖 $(0,\frac{1}{2})$

(ii) 令 $H''=\{(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n})\mid n=1,2,\dots,98\}$

$\forall x\in(\frac{1}{100},1)$，$\exists n\in\{1,2,\dots,98\}$ s.t. $\frac{1}{n+2}<x<\frac{1}{n}$

故能选出有限个开区间覆盖 $(\frac{1}{100},1)$

6. $\forall\varepsilon>0$，$\exists x=\min\{b,a+\frac{\varepsilon}{2}\}\in U^\circ(a;\varepsilon)\cap[a,b]\Rightarrow a$ 是聚点

$\forall \xi\in(a,b]$，令 $x_n=\xi-\frac{1}{n}(\xi-a)$，则 $\{x_n\}\subseteq[a,b]$，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\xi \Rightarrow \xi$ 是聚点

综上即证

7. 不妨设 x_n 单增.

设 ξ 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点

则 $\forall n$，$x_n<\xi$，否则不妨设 $x_k<\xi<x_{k+1}$，令 $\varepsilon=\min\{\xi-x_n, x_{n+1}-\xi\}$，则 $U^\circ(\xi;\varepsilon)\cap\{x_n\}=\varnothing$，与 ξ 是聚点矛盾！

故 $\{x_n\}$ 单调有界，设 $\sup x_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$，$A\le\xi$

假设 $\xi>A$，则 $U^\circ(\xi;\xi-A)\cap\{x_n\}=\varnothing$，与 ξ 是聚点矛盾！

故 $\xi=A=\sup x_n$

又由极限的唯一性可知 A 唯一 $\Rightarrow \xi$ 唯一

8. 设 S 为一有界无限点集，则 $\exists M>0$ s.t. $S\subseteq[-M,M]$

假设 $[-M,M]$ 上不存在 S 的聚点

则 $\forall x\in[-M,M]$，$\exists\varepsilon_x>0$ s.t. $U(x;\varepsilon_x)$ 中只存在 S 中的有限多个点

又 $H=\{U(x;\varepsilon_x)\mid x\in[-M,M]\}$ 是 $[-M,M]$ 的一个开覆盖，由 Heine-Borel 有限覆盖定理，$\exists H'=\{(x_i;\varepsilon_{x_i})\mid i=1,2,\dots,n\}\subseteq H$ s.t. H' 是 $[-M,M]$ 的一个开覆盖

又 H' 中每个开区间中只有 S 中有限个点，H' 中又只有有限个开区间 $\Rightarrow H'$ 中只有有限个点，与 S 为无限点集矛盾！

故 $[-M,M]$ 上存在 S 的聚点，即证

9. 设 $\{x_n\}$ 满足 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$ s.t. $\forall m,n>N$，$|x_m-x_n|<\varepsilon$

令 $\varepsilon=1$，则 $\exists N_0>0$ s.t. $\forall m,n>N_0$，$|x_m-x_n|<\varepsilon \Rightarrow \forall n>N_0$，$|a_n-a_{N_0+1}|<1 \Rightarrow |a_n|<|a_{N_0+1}|+1$

令 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\dots,|x_{N_0}|,|x_{N_0+1}|+1\}$，则 $\forall n>0$，$|x_n|\le M$，故 $\{x_n\}$ 有界

由 Weierstrass 聚点定理，存在 ξ 为 $\{x_n\}$ 的聚点. 由聚点的定义可知，存在 $\{a_n\}$ 的一子列 $\{a_{k_n}\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{k_n}=\xi$

则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$ s.t. $\forall n_k, n>N$，$|a_n-a_{k_n}|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|a_{k_n}-\xi|<\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \forall n>N$，$|a_n-\xi|\le|a_n-a_{k_n}|+|a_{k_n}-\xi|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\xi$，即证

10. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)f(b)<0$，不妨设 $f(a)<0$，$f(b)>0$

假设 $\forall x\in(a,b)$，$f(x)\ne0$

f 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow \forall x_0\in(a,b)$，$\exists\delta_{x_0}$ s.t. $\forall x\in U(x_0;\delta_{x_0})\cap[a,b]$，$f(x)$ 同号

则 $H=\{U(x_0;\delta_{x_0})\mid x_0\in(a,b)\}$ 为 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 由 Heine-Borel 有限覆盖定理，$\exists H'=\{(x_i;\varepsilon_{x_i})\mid i=1,2,\dots,n\}\subseteq H$ s.t. H' 是 $[-M,M]$ 的一个开覆盖

设 $a\in U(x_k;\delta_{x_k})$，$f(a)<0 \Rightarrow \forall x\in U(x_k;\delta_{x_k})$，$f(x)<0$

又 H' 是 $[-M,M]$ 的一个开覆盖 $\Rightarrow \forall U(x_i;\delta_{x_i})\in H'$，$\exists j\ne i$ s.t. $U(x_i;\delta_{x_i})\cap U(x_j;\delta_{x_j})\ne\varnothing$

$\Rightarrow \forall x\in[-M,M]$，$f(x)<0$，与 $f(b)>0$ 矛盾！

故 $\exists x\in(a,b)$ s.t. $f(x)=0$，即证

11. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\forall x_0\in[a,b]$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_{x_0}>0$ s.t. $\forall x\in U(x_0;\frac{\delta_{x_0}}{2})$ s.t. $|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$

则 $H=\{U(x;\frac{\delta_x}{2})\mid x\in[a,b]\}$ 为 $[a,b]$ 的一个开覆盖，由 Heine-Borel 有限覆盖定理，$\exists H'=\{(x_i;\varepsilon_{x_i})\mid i=1,2,\dots,n\}\subseteq H$ s.t. H' 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖

令 $\delta=\min\limits_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{2}$，则 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$，设 $x_1\in U(x_k;\frac{\delta_{x_k}}{2})$

若 $|x_1-x_2|<\delta$，则 $|x_2-x_k|\le|x_2-x_1|+|x_1-x_k|<\delta+\frac{\delta_{x_k}}{2}\le\frac{\delta_{x_k}}{2}+\frac{\delta_{x_k}}{2}=\delta_{x_k}$

$\Rightarrow |f(x_1)-f(x_k)|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|f(x_2)-f(x_k)|<\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-f(x_k)|+|f(x_k)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，即证

习 题 8.1

1. 验证下列等式，并与(3)、(4)两式相比照：

(1) $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$； (2) $\int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C$.

2. 求一曲线 $y=f(x)$，使得在曲线上每一点 (x,y) 处的切线斜率为 $2x$，且通过点 $(2,5)$.

3. 验证 $y=\frac{x^2}{2}\operatorname{sgn} x$ 是 $|x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数.

4. 据理说明为什么每一个含有第一类间断点的函数都没有原函数.

5. 求下列不定积分：

(1) $\int\left(1-x+x^3-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\mathrm{d}x$； (2) $\int\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2gx}}$ (g 为正常数)； (4) $\int(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x$；

(5) $\int\frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}\mathrm{d}x$； (6) $\int\frac{x^2}{3(1+x^2)}\mathrm{d}x$；

(7) $\int\tan^2 x\mathrm{d}x$； (8) $\int\sin^2 x\mathrm{d}x$；

(9) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$； (10) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\mathrm{d}x$；

(11) $\int 10^t\cdot 3^{2t}\mathrm{d}t$； (12) $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$；

(13) $\int\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\mathrm{d}x$； (14) $\int(\cos x+\sin x)^2\mathrm{d}x$；

(15) $\int\cos x\cdot\cos 2x\mathrm{d}x$； (16) $\int(e^x-e^{-x})^3\mathrm{d}x$；

(17) $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\mathrm{d}x$； (18) $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\mathrm{d}x$.

6. 求下列不定积分：

(1) $\int e^{-|x|}\mathrm{d}x$； (2) $\int|\sin x|\mathrm{d}x$.

7. 设 $f'(\arctan x)=x^2$，求 $f(x)$.

8. 举例说明含有第二类间断点的函数可能有原函数，也可能没有原函数.

1.

(1) $(f(x)+C)' = f'(x)$

(2) 令 $u=f(x)$，则 $(u+C)'=1 \Rightarrow (f(x)+C)' = df(x)$

2. $f'(x)=2x$，$f(2)=5 \Rightarrow f(x)=x^2+1$

3. $y=\begin{cases}\frac{x^2}{2}, & x\geq 0\\ -\frac{x^2}{2}, & x<0\end{cases} \Rightarrow y'=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}=|x|$

4. 设 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点.

假设 $f(x)$ 存在原函数 $F(x)$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} F'(x) = F'(x_0) = f(x_0)$，与 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续矛盾!

故 $f(x)$ 不存在原函数

5.

(1) $\int(1-x+x^3-x^{-\frac{2}{3}})\,dx = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4-3x^{\frac{1}{3}}+C$

(2) $\int(x-\frac{1}{\sqrt{x}})^2dx = \int(x^2-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-1})\,dx = \frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\ln x+C$

(3) $\int\frac{1}{\sqrt{2gx}}\,dx = \sqrt{\frac{2x}{g}}+C$

(4) $\int(2^x+3^x)^2dx = \int(4^x+2\cdot 6^x+9^x)\,dx = \frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2\cdot 6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+C$

(5) $\int\frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}\,dx = \frac{3}{2}\arcsin x+C$

(6) $\int\frac{x^2}{3(1+x^2)}\,dx = \int(\frac{1}{3}-\frac{1}{3(1+x^2)})\,dx = \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\arctan x+C$

(7) $\int\tan^2 x\,dx = \int(\sec^2 x-1)\,dx = \tan x - x + C$

(8) $\int\sin^2 x\,dx = \int(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$

(9) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,dx = \int(\cos x+\sin x)\,dx = \sin x-\cos x+C$

(10) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\,dx = \int(\csc^2 x-\sec^2 x)\,dx = -\cot x-\tan x+C$

(11) $\int 10^t\cdot 3^{2t}\,dt = \int 90^t\,dt = \frac{90^t}{\ln 90}+C$

(12) $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx = \int x^{\frac{7}{8}}\,dx = \frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}+C$

(13) $\int(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}})\,dx = \int(\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}})\,dx = \int\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\arcsin x+C$

(14) $\int(\cos x+\sin x)^2dx = \int(\sin 2x+1)\,dx = \frac{1}{2}\cos 2x+x+C$

(15) $\int(\cos x)(\cos 2x)\,dx = \int(\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x)\,dx = \frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{2}\sin x+C$

(16) $\int(e^x-e^{-x})^2dx = \int(e^{2x}-2+e^{-2x})\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}-2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$

(17) $\int\frac{2^{x+1}-5^{x+1}}{10^x}\,dx = \int(2\cdot(\frac{1}{5})^x-5\cdot(\frac{1}{2})^x)\,dx = \frac{2\cdot(\frac{1}{5})^x}{-\ln 5}-\frac{5\cdot(\frac{1}{2})^x}{-\ln 2}+C$

(18) $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3} = \int(x^{-1}+x^{-5})\,dx = \ln x-\frac{1}{4}x^{-4}+C$

6.

(1) $e^{-|x|}=\begin{cases}e^{-x}, & x\geq 0\\ e^{x}, & x<0\end{cases} \Rightarrow \int e^{-|x|}dx=\begin{cases}-e^{-x}+C_1, & x\geq 0\\ e^{x}+C_2, & x<0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\int e^{-|x|}dx = \int e^{-|x|}dx\Big|_{x=0} \Rightarrow C_2=C_1-2$

故 $\int e^{-|x|}dx = \begin{cases} -e^{-x}+C, & x\geq 0 \\ e^{x}-2+C, & x<0 \end{cases}$

(2) $|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & x\in[2k\pi, \pi+2k\pi) \\ -\sin x, & x\in[-\pi+2k\pi, 2k\pi) \end{cases} \Rightarrow \int |\sin x|\,dx = \begin{cases} -\cos x + C_1, & x\in[2k\pi, \pi+2k\pi) \\ \cos x + C_2, & x\in[-\pi+2k\pi, 2k\pi) \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 2k\pi^-} \int |\sin x|\,dx = \int |\sin x|\,dx \Big|_{x=2k\pi}$, $\lim\limits_{x\to(\pi+2k\pi)^-} \int |\sin x|\,dx = \int |\sin x|\,dx \Big|_{x=\pi+2k\pi} \Rightarrow C_2 = C_1 - 2$

故 $\int |\sin x|\,dx = \begin{cases} -\cos x + C, & x\in[2k\pi, \pi+2k\pi) \\ \cos x - 2 + C, & x\in[-\pi+2k\pi, 2k\pi) \end{cases}$

7. $f'(\arctan x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = \tan^2 x \Rightarrow f(x) = \int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \tan x - x + C$

8. $f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$, $\exists\ F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$g(x) = D(x)$，则不存在原函数

习 题 8.2

1. 应用换元积分法求下列不定积分：

(1) $\int\cos(3x+4)\mathrm{d}x$；　(2) $\int xe^{2x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$；　(4) $\int(1+x)^n\mathrm{d}x$；

(5) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\right)\mathrm{d}x$；　(6) $\int 2^{2x+3}\mathrm{d}x$；

(7) $\int\sqrt{8-3x}\,\mathrm{d}x$；　(8) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{7-5x}}$；

(9) $\int x\sin x^2\mathrm{d}x$；　(10) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$；

(11) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$；　(12) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$；

(13) $\int\csc x\mathrm{d}x$；　(14) $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(15) $\int\frac{x}{4+x^4}\mathrm{d}x$；　(16) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$；

(17) $\int\frac{x^4}{(1-x^5)^3}\mathrm{d}x$；　(18) $\int\frac{x^3}{x^8-2}\mathrm{d}x$；

(19) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)}$；　(20) $\int\cot x\mathrm{d}x$；

(21) $\int\cos^5x\mathrm{d}x$；　(22) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x}$；

(23) $\int\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$；　(24) $\int\frac{2x-3}{x^2-3x+8}\mathrm{d}x$；

(25) $\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3}\mathrm{d}x$；　(26) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}\ (a>0)$；

(27) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\ (a>0)$；　(28) $\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(29) $\int\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$；　(30) $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x$；

(31) $\int x(1-2x)^{99}\mathrm{d}x$；　(32) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^n)}$（$n$ 为自然数）；

(33) $\int\frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\mathrm{d}x$；　(34) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x}$；

(35) $\int\frac{\ln 2x}{x\ln 4x}\mathrm{d}x$；　(36) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

2. 应用分部积分法求下列不定积分：

(1) $\int\arcsin x\mathrm{d}x$；　(2) $\int\ln x\mathrm{d}x$；

(3) $\int x^2\cos x\mathrm{d}x$；　(4) $\int\frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x$；

(5) $\int(\ln x)^2\mathrm{d}x$；　(6) $\int x\arctan x\mathrm{d}x$；

(7) $\int\left[\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right]\mathrm{d}x$；　(8) $\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x$；

(9) $\int\sec^3x\mathrm{d}x$；　(10) $\int\sqrt{x^2\pm a^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

3. 求下列不定积分：

(1) $\int[f(x)]^\alpha f'(x)\mathrm{d}x\ (\alpha\neq-1)$；　(2) $\int\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$；　(4) $\int e^{f(x)}f'(x)\mathrm{d}x$.

4. 证明：

(1) 若 $I_n=\int\tan^nx\mathrm{d}x,n=2,3,\cdots$，则

$$I_n=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}.$$

(2) 若 $I(m,n)=\int\cos^mx\sin^nx\mathrm{d}x$，则当 $m+n\neq0$ 时，

$$I(m,n)=\frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n)$$
$$=-\frac{\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2),$$
$$n,m=2,3,\cdots.$$

5. 利用上题的递推公式计算：

(1) $\int\tan^3x\mathrm{d}x$；　(2) $\int\tan^4x\mathrm{d}x$；

(3) $\int\cos^2x\sin^4x\mathrm{d}x$.

6. 导出下列不定积分对于正整数 n 的递推公式：

(1) $I_n=\int x^ne^{kx}\mathrm{d}x$；　(2) $I_n=\int(\ln x)^n\mathrm{d}x$；

(3) $I_n=\int(\arcsin x)^n\mathrm{d}x$；　(4) $I_n=\int e^{ax}\sin^nx\mathrm{d}x$.

7. 利用上题所得递推公式计算：

(1) $\int x^3e^{2x}\mathrm{d}x$；　(2) $\int(\ln x)^3\mathrm{d}x$；

(3) $\int(\arcsin x)^3\mathrm{d}x$；　(4) $\int e^x\sin^3x\mathrm{d}x$.

1.

(1) $\int\cos(3x+4)dx=\frac{1}{3}\int\cos(3x+4)\cdot(3x+4)'dx=\frac{1}{3}\int\cos t\,dt=\frac{1}{3}\sin t+C=\frac{1}{3}\sin(3x+4)+C$

(2) $\int xe^{2x^2}dx=\frac{1}{4}\int(4x)e^{2x^2}dx=\frac{1}{4}\int(2x^2)'e^{2x^2}dx=\frac{1}{4}\int e^t dt=\frac{1}{4}e^t+C=\frac{1}{4}e^{2x^2}+C$

(3) $\int\frac{1}{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)'}{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}dt=\frac{1}{2}\ln t+C=\frac{1}{2}\ln(2x+1)$

(4) $\int(1+x)^n dx=\int t^n dt=\frac{t^{n+1}}{n+1}+C=\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}+C$

(5) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\right)dx=\int\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}dx+\int\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}dx=\int\frac{(\frac{x}{\sqrt3})'}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt3})^2}}dx+\frac{1}{\sqrt3}\int\frac{(\sqrt3x)'}{\sqrt{1-(\sqrt3x)^2}}dx=\arcsin\frac{x}{\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt3}\arcsin\sqrt3x+C$

(6) $\int 2^{2x+3}dx=\frac{1}{2}\int(2x+3)'2^{2x+3}dx=\frac{1}{2}\int 2^t dt=\frac{2^t}{2\ln2}+C=\frac{2^{2x+2}}{\ln2}+C$

(7) $\int\sqrt{8-3x}\,dx=-\frac{1}{3}\int(8-3x)'\sqrt{8-3x}\,dx=-\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt=-\frac{2}{9}t^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}(8-3x)^{\frac{3}{2}}dx$

(8) $\int\frac{1}{\sqrt[3]{7-5x}}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{(7-5x)'}{\sqrt[3]{7-5x}}dx=-\frac{1}{5}\int t^{-\frac{1}{3}}dt=-\frac{3}{10}t^{\frac{2}{3}}+C=-\frac{3}{10}(7-5x)^{\frac{2}{3}}+C$

(9) $\int x\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int(x^2)'\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int\sin t\,dt=-\frac{1}{2}\cos t+C=-\frac{1}{2}\cos x^2+C$

(10) $\int\frac{1}{\sin^2(2x+\frac{\pi}{4})}dx=\frac{1}{2}\int(2x+\frac{\pi}{4})'\csc^2(2x+\frac{\pi}{4})dx=\frac{1}{2}\int\csc^2t\,dt=-\frac{1}{2}\cot t+C=-\frac{1}{2}\cot(2x+\frac{\pi}{4})+C$

(11) $\int\frac{1}{1+\cos x}dx=\int\frac{(\frac{x}{2})'}{\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int\sec^2t\,dt=\tan t+C=\tan\frac{x}{2}+C$

(12) $\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\int\frac{(x-\frac{\pi}{2})'}{1+\cos(x-\frac{\pi}{2})}dx=\tan(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})+C$

(13) $\int\csc x\,dx=\int\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx=\int\frac{(\tan\frac{x}{2})'}{\tan\frac{x}{2}}dx=\ln|\tan\frac{x}{2}|+C$

(14) $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int(1-x^2)'(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C$

(15) $\int\frac{x}{4+x^4}dx=\frac{1}{4}\int\frac{(\frac{x^2}{2})'}{1+(\frac{x^2}{2})^2}dx=\frac{1}{4}\arctan\frac{x^2}{2}+C$

(16) $\int\frac{1}{x\ln x}dx=\int\frac{(\ln x)'}{\ln x}dx=\ln|\ln x|+C$

(17) $\int\frac{x^4}{(1-x^5)^3}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{(1-x^5)'}{(1-x^5)^3}dx=\frac{1}{10}(1-x^5)^{-2}+C$

(18) $\int\frac{x^3}{x^8-2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{2\sqrt2}\left[\frac{(x^4-\sqrt2)'}{x^4-\sqrt2}-\frac{(x^4+\sqrt2)'}{x^4+\sqrt2}\right]dx=\frac{1}{8\sqrt2}\ln\left|\frac{x^4+\sqrt2}{x^4-\sqrt2}\right|+C$

(19) $\int\frac{1}{x(1+x)}dx=\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x})dx=\ln\frac{x}{1+x}+C$

(20) $\int\cot x\,dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\ln|\sin x|+C$

(21) $\int\cos^5x\,dx=\int(\cos^4x)(\cos x)dx=\int(1-(\sin^2x)^2)(\sin x)'dx=\int(1-2\sin^2x+\sin^4x)(\sin x)'dx=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3x+\frac{1}{5}\sin^5x+C$

(22) $\int\frac{1}{\sin x\cos x}dx=\frac{1}{2}\int(\csc2x)(2x)'dx=\frac{1}{2}\ln|\tan x|+C$

(23) $\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{1}{1+(e^x)^2}\cdot(e^x)'dx=\arctan e^x+C$

(24) $\int\frac{2x-3}{x^2-3x+8}dx=\int\frac{(x^2-3x+8)'}{x^2-3x+8}dx=\ln|x^2-3x+8|+C$

(25) 令 $t=x+1$，则 $x=t-1$

$\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3}dx=\int\frac{t^2-2t+3}{t^3}(t-1)'dt=\ln|t|+2t^{-1}-\frac{3}{2}t^{-2}+C=\ln|x-1|+2(x-1)^{-1}-\frac{3}{2}(x-1)^{-2}+C$

(26) 令 $t=\arctan\frac{x}{a}$，则 $x=a\tan t$

$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\int\frac{1}{a\sec t}(a\tan t)'dt=\int\sec t\,dt=\int\frac{\sec^2t+\sec t\tan t}{\sec t+\tan t}d=\int\frac{(\sec t+\tan t)'}{\sec t+\tan t}dx=\ln|\sec t+\tan t|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C$

(27) 令 $t=\arctan\frac{x}{a}$，则 $x=a\tan t$

$\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\frac{1}{a^3\sec^3t}(a\tan t)'dt=\int\frac{1}{a^2}\cos t\,dt=\frac{1}{a^2}\sin t+C=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C$

(28) 令 $t=\arcsin x$，则 $x=\sin t$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{\sin^5 t}{\cos t}(\sin t)'\,dt=\int \sin^5 t\,dt=-\int(1-2\cos^2 t+\cos^4 t)(\cos t)'dt=-\cos t+\frac{2}{3}\cos^3 t-\frac{1}{5}\cos^5 t+C=-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}+C$$

(29) 令 $t=x^{\frac{1}{6}}$，则 $x=t^6$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{t^3}{1-t^2}(t^6)'dt=\int\frac{6t^8}{1-t^2}dt=-6\int\left(t^6+t^4+t^2+1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=-\frac{6}{7}t^7-\frac{6}{5}t^5-2t^3-6t-3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=-\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{1}{6}}-3\ln\left|\frac{x^{\frac{1}{6}}-1}{x^{\frac{1}{6}}+1}\right|+C$$

(30) 令 $t=\sqrt{x+1}$，则 $x=t^2-1$

$$\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx=\int\frac{t-1}{t+1}(t^2-1)'dt=\int\left(2t-4+\frac{4}{t+1}\right)dt=t^2-4t+4\ln|t+1|+C=x+1-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}+1)+C$$

(31) 令 $t=-2x+1$，则 $x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t$

$$\int x(1-2x)^{99}dx=\int\frac{1}{2}(1-t)t^{99}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\right)'dt=-\frac{1}{4}\int(t^{99}-t^{100})dt=\frac{1}{404}t^{101}-\frac{1}{400}t^{100}+C=\frac{1}{404}(1-2x)^{101}-\frac{1}{400}(1-2x)^{100}+C$$

(32) $\int\frac{1}{x(1+x^n)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x^{n-1}}{1+x^n}\right)dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{1+x^n}\cdot\frac{1}{n}d(1+x^n)=\ln|x|-\frac{1}{n}\ln|1+x^n|+C=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{x^n}{1+x^n}\right|+C$

(33) $\int\frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx=\int\frac{x^{n-1}(x^n+1)-x^{n-1}}{x^n+1}dx=\int x^{n-1}dx-\int\frac{x^{n-1}}{x^n+1}dx=\int x^{n-1}dx-\int\frac{1}{x^n+1}\cdot\frac{1}{n}d(x^n+1)=\frac{1}{n}(x^n-\ln|x^n+1|)+C$

(34) 令 $t=\ln x$，则 $x=e^t$

$$\int\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}dx=\int\frac{1}{e^t\cdot t\cdot\ln t}(e^t)'dt=\int\frac{1}{t\ln t}dt=\int\frac{1}{\ln t}d\ln t=\ln|\ln t|+C=\ln|\ln\ln x|+C$$

(35) 令 $t=\ln 2x$，则 $x=\frac{1}{2}e^t$

$$\int\frac{\ln 2x}{x\ln 4x}dx=\int\frac{2t}{e^t(t+\ln 2)}\left(\frac{1}{2}e^t\right)'dt=\int\frac{t}{t+\ln 2}dt=\int\left(1-\frac{\ln 2}{t+\ln 2}\right)dt=t-(\ln 2)\ln(t+\ln 2)+C=\ln 2x-(\ln 2)\ln\ln 4x+C$$

(36) 令 $t=\operatorname{arcsec}t$，则 $x=\sec t$

$$\int\frac{1}{x^4\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{1}{\sec^4 t\tan t}(\sec t)'dt=\int\cos^3 t\,dt=\int(1-\sin^2 t)\,d\sin t=\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}{x^3}+C$$

2.

(1) $u=\arcsin x$，$v=x$

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du\Rightarrow\int\arcsin x\,dx=x\cdot\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)=-\sqrt{1-x^2}+C$$

$$\Rightarrow\int\arcsin x\,dx=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$$

(2) $u=\ln x$，$v=x$

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du\Rightarrow\int\ln x\,dx=x\ln x-\int 1\,dx=x\ln x-x+C$$

(3) $\int x^2\cos x\,dx=\int x^2 d\sin x=x^2\sin x-\int\sin x\,dx^2$

$$\int\sin x\,dx^2=2\int x\sin x\,dx=-2\int x\,d\cos x=-2\left(x\cos x-\int\cos x\,dx\right)=-2x\cos x+2\sin x+C$$

$$\Rightarrow\int x^2\cos x\,dx=x^2\sin x-(-2x\cos x+2\sin x+C)=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$$

(4) $\int\frac{\ln x}{x^3}dx=-\frac{1}{2}\int\ln x\,dx^{-2}=-\frac{1}{2}\left(x^{-2}\ln x-\int x^{-2}d\ln x\right)$

$$\int x^{-2}d\ln x=\int x^{-3}dx=-\frac{1}{2}x^{-2}+C$$

$$\Rightarrow\int\frac{\ln x}{x^3}dx=-\frac{1}{2}\left(x^{-2}\ln x+\frac{1}{2}x^{-2}-C\right)=-\frac{1}{2}x^{-2}\ln x-\frac{1}{4}x^{-2}+C$$

(5) $\int(\ln x)^2dx=\int t^2de^t=t^2e^t-\int e^t dt^2$

$$\int e^t dt^2=2\int te^t dt=2\int t\,de^t=2\int\ln x\,dx=2\left(x\ln x-\int x\,d\ln x\right)=2\left(x\ln x-\int 1\,dx\right)=2x\ln x-2x+C$$

$$\Rightarrow\int(\ln x)^2dx=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$$

(6) $\int x\arctan x\,dx=\frac{1}{2}\int\arctan x\,dx^2=\frac{1}{2}\left(x^2\arctan x-\int x^2\,d\arctan x\right)$

$$\int x^2\,d\arctan x=\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int 1\,dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx=x-\arctan x+C$$

$$\Rightarrow\int x\arctan x\,dx=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C$$

(7) $\int\left[\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right]dx=\int\ln(\ln x)\,dx+\int\frac{1}{\ln x}dx=x\ln(\ln x)-\int x\,d\ln(\ln x)+\int\frac{1}{\ln x}dx$

$$\int x\,d\ln(\ln x)=\int\frac{1}{\ln x}dx$$

$$\Rightarrow\int\left[\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right]dx=x\ln(\ln x)-\int\frac{1}{\ln x}dx+\int\frac{1}{\ln x}dx=x\ln(\ln x)$$

(8) $\int(\arcsin x)^2dx=\int t^2 d\sin t=t^2\sin t-\int\sin t\,dt^2$

$$\int\sin t\,dt^2=2\int t\sin t\,dt=-2\int t\,d\cos t=-2\left(t\cos t-\int\cos t\,dt\right)=-2t\cos t+2\sin t+C$$

$$\Rightarrow\int(\arcsin x)^2dx=t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t+C=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$$

(9) $\int\sec^3 x\,dx=\int\sec x\,d\tan x=\tan x\sec x-\int\tan x\,d\sec x$

$$\int\tan x\,d\sec x=\int\tan^2 x\sec x\,dx=\int(\sec^2 x-1)\sec x\,dx=\int\sec^3 x\,dx-\int\sec x\,dx=\int\sec^3 x\,dx-\ln|\sec x+\tan x|+C$$

$\Rightarrow \int \sec^3 x\, dx = \tan x \sec x - \int \sec^3 x\, dx + \ln|\sec x + \tan x| + C$

$\Rightarrow \int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\tan x \sec x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$

(10) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int x\, d\sqrt{x^2 \pm a^2}$

$\int x\, d\sqrt{x^2 \pm a^2} = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx = \int \frac{x^2 \pm a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx - \int \frac{\pm a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx = \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx \pm a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

$\Rightarrow \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx \mp a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

$\Rightarrow \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

3.

(1) $\int [f(x)]^a f'(x)\, dx = \int [f(x)]^a df(x) = \frac{1}{a+1}[f(x)]^{a+1} + C$

(2) $\int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}\, dx = \int \frac{1}{1 + [f(x)]^2}\, df(x) = \arctan f(x) + C$

(3) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \int \frac{1}{f(x)}\, df(x) = \ln f(x) + C$

(4) $\int e^{f(x)} f'(x)\, dx = \int e^{f(x)} df(x) = e^{f(x)} + C$

4.

(1) $I_n = \int \tan^n x\, dx = \int \tan^{n-2} x\, (\sec^2 x - 1)\, dx = \int \tan^{n-2} x\, d\tan x - \int \tan^{n-2} x\, dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - I_{n-2}$

(2) $I(m,n) = \int \cos^m x \sin^n x\, dx = \frac{1}{n+1}\int \cos^{m-1} x\, d\sin^{n+1} x = \frac{1}{n+1}\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x - \frac{1}{n+1}\int \sin^{n+1} x\, d\cos^{m-1} x = \frac{1}{n+1}\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1}\int \cos^{m-2} x \sin^{n+2} x\, dx$

$\int \cos^{m-2} x \sin^{n+2} x\, dx = \int \cos^{m-2} x \sin^n x\, (1 - \cos^2 x)\, dx = \int \cos^{m-2} x \sin^n x\, dx - \int \cos^n x \sin^n x\, dx = I(m-2, n) - I(m, n)$

代入得：$I(m,n) = \frac{1}{n+1}\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1} I(m-2, n) - \frac{m-1}{n+1} I(m, n) \Rightarrow I(m,n) = \frac{1}{m+n}\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + \frac{m-1}{m+n} I(m-2, n)$

类似可证 $I(m,n) = -\frac{1}{m+n}\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} I(m, n-2)$

5.

(1) $\int \tan^3 x\, dx = \frac{1}{2}\tan^2 x - \int \tan x\, dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \int \frac{1}{\cos x}\, d\cos x = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$

(2) $\int \tan^4 x\, dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \int \tan^2 x\, dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$

(3) $\int \cos^2 x \sin^4 x\, dx = \frac{1}{6}\cos x \sin^5 x + \frac{1}{6}\int \sin^4 x\, dx$

$\int \sin^4 x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 dx = \int (\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2})^2 dx = \int (\frac{1}{4}\cos^2 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4})\, dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$

$\Rightarrow \int \cos^2 x \sin^4 x\, dx = \frac{1}{6}\cos x \sin^5 x + \frac{1}{16}x - \frac{1}{24}\sin 2x + \frac{1}{192}\sin 4x + C$

6.

(1) $I_n = \int x^n e^{kx}\, dx = \frac{1}{k}\int x^n\, de^{kx} = \frac{1}{k}(x^n e^{kx} - \int e^{kx}\, dx^n)$

$\int e^{kx}\, dx^n = n\int x^{n-1} e^{kx}\, dx = n I_{n-1}$

$\Rightarrow I_n = \frac{1}{k}(x^n e^{kx} - n I_{n-1}) = \frac{1}{k}x^n e^{kx} - \frac{n}{k} I_{n-1}$

(2) $I_n = \int (\ln x)^n dx = \int t^n de^t = t^n e^t - \int e^t dt^n = t^n e^t - n\int t^{n-1} de^t = x(\ln x)^n - n I_{n-1}$

(3) $I_n = \int (\arcsin x)^n dx = x(\arcsin x)^n - \int x\, d(\arcsin x)^n$

$\int x\, d(\arcsin x)^n = n\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}(\arcsin x)^{n-1}\, dx = -n\int (\arcsin x)^{n-1}\, d\sqrt{1-x^2} = -n(\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-1} - (n-1)\int (\arcsin x)^{n-2} dx$

代入得：$I_n = x(\arcsin x)^n + n\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-1} - n(n-1) I_{n-2}$

(4) $I_n = \int e^{ax} \sin^n x\, dx = \frac{1}{a}\int \sin^n x\, de^{ax} = \frac{1}{a}(e^{ax}\sin^n x - \int e^{ax} d\sin^n x)$

$\int e^{ax} d\sin^n x = n\int e^{ax}\sin^{n-1} x \cos x\, dx = \frac{n}{a^2}\int \sin^{n-1} x \cos x\, de^{ax} = \frac{n}{a^2}(e^{ax}\sin^{n-1} x \cos x - \int e^{ax} d(\sin^{n-1} x \cos x))$

$\int e^{ax} d(\sin^{n-1} x \cos x) = \int e^{ax}((n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x - \sin^n x)\, dx = \int e^{ax}(n-1)\sin^{n-2} x\, (1 - \sin^2 x)\, dx - \int e^{ax}\sin^n x\, dx = (n-1)\int e^{ax}\sin^{n-2} x\, dx - (n-1)\int e^{ax}\sin^n x\, dx - I_n$

代入得：$I_n = \frac{1}{n^2 + a^2}[e^{ax}\sin^{n-1} x(a\sin x - n\cos x) + n(n-1) I_{n-2}]$

7.

(1) $\int x^3 e^{2x} dx = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{2}\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{2}\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{4}x e^{2x} - \frac{3}{4}\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{4}x e^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + C$

(2) $\int (\ln x)^3 dx = x(\ln x)^3 - 3\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6\int \ln x\, dx = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + C$

(3) $\int (\arcsin x)^3 dx = x(\arcsin x) + 3\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2 - 6x\int \arcsin x\, dx = x(\arcsin x)^3 + 3\sqrt{2-x^2}(\arcsin x)^2 - 6x\arcsin x - 6\sqrt{1-x^2} + C$

(4) $\int e^x \sin^3 x\, dx = \frac{1}{10}e^x \sin^2 x(\sin x - 3\cos x) + \frac{3}{5}\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{10}e^x \sin^2 x(\sin x - 3\cos x) + \frac{3}{10}e^x(\sin x - \cos x) + C$

习 题 8.3

1. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{x^3}{x-1}dx$；　(2) $\int \frac{x-2}{x^2-7x+12}dx$；

(3) $\int \frac{dx}{1+x^3}$；　(4) $\int \frac{dx}{1+x^4}$；

(5) $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)^2}$；　(6) $\int \frac{x-2}{(2x^2+2x+1)^2}dx$.

2. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$；　(2) $\int \frac{dx}{2+\sin^2 x}$；

(3) $\int \frac{dx}{1+\tan x}$；　(4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$；

(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$；　(6) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

1.

(1) $\frac{x^3}{x-1} = x^2+x+1+\frac{1}{x-1}$

$\int \frac{x^3}{x-1}dx = \int (x^2+x+1)dx + \int \frac{1}{x-1}dx = (\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C_1)+(\ln|x-1|+C_2) = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|+C$

(2) $\frac{x-2}{x^2-7x+12} = \frac{x-2}{(x-3)(x-4)} = \frac{A_1}{x-3}+\frac{A_2}{x-4}$

$x-2 = A_1(x-4)+A_2(x-3) = (A_1+A_2)x+(-4A_1-3A_2) \Rightarrow A_1=-1,\ A_2=2$

$\Rightarrow \int \frac{x-2}{x^2-7x+12}dx = -\int \frac{1}{x-3}dx + 2\int \frac{1}{x-4}dx = -(\ln|x-3|+C_1)+2(\ln|x-4|+C_2) = -\ln|x-3|+2\ln|x-4|+C$

(3) $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$

$1 = A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1) = (A+B)x^2+(-A+B+C)x+(A+C) \Rightarrow A=-\frac{1}{3},\ B=\frac{1}{3},\ C=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{1+x^3} = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2-x+1}dx$

$\int \frac{1}{x+1}dx = \ln|x+1|+C_1$

令 $t=x-\frac{1}{2}$，则 $\frac{x+2}{x^2-x+1} = \frac{t+\frac{5}{2}}{t^2+\frac{3}{4}} \Rightarrow \int \frac{x+2}{x^2-x+1}dx = \int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt + \frac{5}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}dt = (\frac{1}{2}\ln|t^2+\frac{3}{4}|+C_{21})+(\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t}{\sqrt{3}}+C_{22}) = \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}))+C_2$

$\Rightarrow \int \frac{1}{1+x^3} = -\frac{1}{3}(\ln|x+1|+C_1)+\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}))+C_2) = -\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}})+C$

(4) $\int \frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)-(x^2-1)}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{x^2+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x+\frac{1}{x})}{x^2+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^2-2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+C$

(5) $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}$

$1 = A(x^2+1)^2+(B_1x+C_1)(x-1)(x^2+1)+(B_2x+C_2)(x-1) = (A+B_1)x^4+(-B_1+C_1)x^3+(2A+B_1-C_1+B_2)x^2+(-B_1+C_1-B_2+C_2)x+(A-C_1-C_2)$

$\Rightarrow A=\frac{1}{4},\ B_1=-\frac{1}{4},\ C_1=-\frac{1}{4},\ B_2=-\frac{1}{2},\ C_2=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{4}\int \frac{x+1}{x^2+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx$

$\int \frac{1}{x-1}dx = \ln|x-1|+C_1$

$\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\arctan x+C_2$

$\int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{-2(x^2+1)} + \frac{x}{-2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x + C_3$

$\Rightarrow \int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{4}(\ln|x-1|+C_1)-\frac{1}{4}(\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\arctan x+C_2)-\frac{1}{2}(\frac{1}{-2(x^2+1)}+\frac{x}{-2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan x+C_3) = \frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{8}\ln|x^2+1|-\frac{1}{2}\arctan x+\frac{x+1}{4(x^2+1)}+C$

(6) 令 $t=2x+1$，则 $\frac{x-2}{(2x^2+2x+1)^2} = \frac{4x-8}{(4x^2+4x+2)^2} = \frac{2t-10}{(t^2+1)^2}$，$dx=\frac{1}{2}dt$

$\int \frac{2x-10}{(2x^2+2x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2t-10}{(t^2+1)^2}dt = \int \frac{t}{(t^2+1)^2}dt - 5\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt$

$\int \frac{t}{(t^2+1)^2}dt = \frac{1}{-2(t^2+1)}+C_1$

$\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt = \frac{t}{-2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan t+C_2$

$\Rightarrow \int \frac{2x-10}{(2x^2+2x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2t-10}{(t^2+1)^2}dt = (\frac{1}{-2(t^2+1)}+C_1)-5(\frac{t}{-2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan t+C_2) = \frac{5t-1}{2(t^2+1)}-\frac{5}{2}\arctan t+C = \frac{5x+2}{2x^2+2x+1}-\frac{5}{2}\arctan(2x+1)+C$

2.

(1) 令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $\frac{1}{5-3\cos x} = \frac{1}{5-\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}} = \frac{t^2+1}{8t^2+2}$，$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

$\int \frac{1}{5-3\cos x}dx = \int \frac{t^2+1}{8t^2+2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+(\frac{1}{2})^2}dt = \frac{1}{2}\arctan 2t+C = \frac{1}{2}\arctan(2\tan\frac{x}{2})+C$

(2) 令 $t=\tan x$，则 $\frac{1}{2+\sin^2 x} = \frac{t^2+1}{3t^2+2}$，$dx=\frac{1}{t^2+1}dt$

$\int \frac{1}{2+\sin^2 x}dx = \int \frac{t^2+1}{3t^2+2}\cdot\frac{1}{t^2+1}dt = \int \frac{1}{3t^2+2}dt = \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\frac{\sqrt{6}t}{2}+C = \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan(\frac{\sqrt{6}}{2}\tan x)+C$

(3) 令 $t=\tan x$，则 $dx=\frac{1}{t^2+1}dt$

$\int \frac{1}{1+\tan x}dx = \int \frac{1}{(t+1)(t^2+1)}dt$

$\frac{1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2+1}$

$1 = A(t^2+1)+(Bt+C)(t+1) = (A+B)t^2+(B+C)t+(A+C) \Rightarrow A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2},\ C=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{(t+1)(t^2+1)}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}dt - \frac{1}{2}\int \frac{t-1}{t^2+1}dt$

$$\int \frac{1}{t+1} dt = \ln|t+1| + C_1$$

$$\int \frac{t-1}{t^2+1} dt = \int \frac{t}{t^2+1} dt - \int \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{1}{2}\ln|t^2+1| - \arctan t + C_2$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(t+1)(t^2+1)} dt = \frac{1}{2}(\ln|t+1| + C_1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\ln|t^2+1| - \arctan t + C_2) = \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{4}\ln|t^2+1| + \frac{1}{2}\arctan t + C = \frac{1}{2}\ln|\tan x+1| - \frac{1}{4}\ln|\tan^2 x+1| + \frac{1}{2}x + C$$

(4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx = -\frac{x}{2}\sqrt{1+x-x^2} - \frac{3}{4}\sqrt{1+x-x^2} + \frac{7}{8}\arcsin(\frac{\sqrt{5}}{5}(2x-1)) + C$

(5) 令 $\sqrt{x^2+x} = x+t$，则 $x = \frac{t^2}{1-2t}$，$dx = \frac{2(-t^2+t)}{(1-2t)^2} dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} dx = \ln\left|\sqrt{x^2+x} + x + \frac{1}{2}\right| + C$$

(6) 令 $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$，则 $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt$

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int (\frac{1+t^2}{1-t^2})^2 t \cdot \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt = -4\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} dt$$

令 $t = \sin u$，则 $dt = \cos u\, du$

$$\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} dt = \int \frac{\sin^2 u}{\cos^4 u} \cos u\, du = \int \frac{1-\cos^2 u}{\cos^3 u} du = \int \sec^3 u\, du - \int \sec u\, du$$

$$\int \sec u\, du = \int \frac{\sec^2 u + \sec u \tan u}{\sec u + \tan u} d = \int \frac{(\sec u + \tan u)'}{\sec u + \tan u} dx = \ln|\sec u + \tan u| + C_{11}$$

$$\int \sec^3 u\, du = \int \sec u\, d\tan u = \tan u \sec u - \int \tan u\, d\sec u$$

$$\int \tan u\, d\sec u = \int \tan^2 u \sec u\, du = \int (\sec^2 u - 1)\sec u\, du = \int \sec^3 u\, du - \int \sec u\, du = \int \sec^3 u\, du - \ln|\sec u + \tan u| + C_{12}$$

$$\Rightarrow \int \sec^3 u\, du = \tan u \sec u - \int \sec^3 u\, du + \ln|\sec u + \tan u| + C_{12}$$

$$\Rightarrow \int \sec^3 u\, d = \frac{1}{2}\tan u \sec u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C_{12}$$

$$\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} dt = (\frac{1}{2}\tan u \sec u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C_{12}) - (\ln|\sec u + \tan u| + C_{11}) = \frac{1}{2}\tan u \sec u - \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C_1$$

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = -4(\frac{1}{2}\tan u \sec u - \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C_1) = 2\ln|\sec u + \tan u| - 2\tan u \sec u + C = \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

第八章总练习题

1. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}}dx$；　(2) $\int x\arcsin x dx$；

(3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$；　(4) $\int e^{\sin x}\sin 2x dx$；

(5) $\int e^{\sqrt{x}}dx$；　(6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$；

(7) $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx$；　(8) $\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3}dx$；

(9) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$；　(10) $\int \sin^4 x dx$；

(11) $\int \frac{x-5}{x^3-3x^2+4}dx$；　(12) $\int \arctan(1+\sqrt{x})dx$；

(13) $\int \frac{x^7}{x^4+2}dx$；　(14) $\int \frac{\tan x}{1+\tan x+\tan^2 x}dx$；

(15) $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx$；　(16) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$；

(17) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$；　(18) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^7 x}}$；

(19) $\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx$；

(20) $I_n=\int \frac{v^n}{\sqrt{u}}dx$，其中 $u=a_1+b_1x, v=a_2+b_2x$，求递推形式解.

2. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$；　(2) $\int \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}dx$；

(3) $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx$；　(4) $\int \frac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}dx$.

---

3. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$；　(2) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$；

(3) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$；　(4) $\int \frac{1+x^4}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}}dx$.

4. 周期函数的原函数是否还是周期函数？

5. 导出下列不定积分对于正整数 n 的递推公式：

(1) $\int \frac{dx}{\cos^n x}$；　(2) $\int \frac{\sin nx}{\sin x}dx$.

1.

(1) 令 $t=x^{\frac{1}{12}}$，则 $dx=12t^{11}dt$

$\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}}dx=\int \frac{t^6-2t^4-1}{t^3}\cdot 12t^{11}dt=12\int(t^{14}-2t^{12}-t^8)dt=\frac{4}{5}t^{15}-\frac{24}{13}t^{13}-\frac{4}{3}t^9+C=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{24}{13}x^{\frac{13}{12}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$

(2) $\int x\arcsin x\,dx=\frac{1}{2}\int \arcsin x\,dx^2=\frac{1}{2}(x^2\arcsin x-\int x^2 d\arcsin x)$

令 $t=\arcsin x$，则 $x=\sin t$

$\int x^2 d\arcsin x=\int \sin^2 t\,dt=\int \frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt=\frac{1}{4}\int(1-\cos 2t)d(2t)=\frac{1}{4}(2t-\sin 2t+C_1)=\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C_2$

$\int x\arcsin x\,dx=\frac{1}{2}(x^2\arcsin x-(\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C_2))=\frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C$

(3) 令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2t\,dt$

$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=\int \frac{2t}{1+t}dt=\int 2dt-2\int \frac{1}{1+t}dt=(2t+C_1)-(2\ln|t+1|+C_2)=2t-2\ln|t+1|+C=2x^{\frac{1}{2}}-2|x^{\frac{1}{2}}+1|+C$

(4) 令 $t=\sin x$，则 $dx=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$\int e^{\sin x}\sin 2x\,dx=\int e^t\cdot 2t\sqrt{1-t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=2\int te^t dt=2((t-1)e^t+C_1)=2(\sin x-1)e^{\sin x}+C$

(5) 令 $t=\sqrt{x}$，则 $dx=2t\,dt$

$\int e^{\sqrt{x}}dx=2\int te^t dt=2((t-1)e^t+C_1)=2(x^{\frac{1}{2}}-1)e^{x^{\frac{1}{2}}}+C$

(6) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}=-\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}d\frac{1}{x}=-\arcsin\frac{1}{x}+C$

(7) 令 $t=\tan x$，则 $dx=\frac{1}{1+t^2}dt$

$\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx=\int \frac{t-1}{(t+1)(t^2+1)}dt$

$\frac{t-1}{(t+1)(t^2+1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2+1}\Rightarrow t-1=A(t^2+1)+(Bt+C)(t+1)=(A+B)t^2+(B+C)t+(A+C)\Rightarrow A=-1, B=1, C=0$

$\int \frac{t-1}{(t+1)(t^2+1)}dt=-\int \frac{1}{t+1}dt+\int \frac{t}{t^2+1}dt=-(\ln|t+1|+C_1)+\frac{1}{2}(\ln|t^2+1|+C_2)=-\ln|t+1|+\frac{1}{2}\ln|t^2+1|+C$

(8) 令 $t=x-2$，则 $x=t+2$，$dt=dx$

$\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3}dx=\int \frac{(t+2)^2-(t+2)}{t^3}dt=\int(t^{-1}+3t^{-2}+2t^{-3})dt=\ln|t|-3t^{-1}-t^{-2}+C=\ln|x-2|-3(x-2)^{-1}-(x-2)^{-2}+C$

(9) $\int \frac{1}{\cos^4 x}dx=\int \sec^2 x\,d\tan x=\int(\tan^2 x+1)d\tan x=\frac{1}{3}\tan^3 x+\tan x+C$

(10) $\int \sin^4 x\,dx=\int(\frac{1-\cos 2x}{2})^2dx=\frac{1}{4}(\int 1dx-\int 2\cos 2x\,dx+\int \cos^2 2x\,dx)$

$\int 1dx=x+C_1$

$\int 2\cos 2x\,dx=\int \cos 2x\,d(2x)=\sin 2x+C_2$

$\int \cos^2 2x\,dx=\int \frac{\cos 4x+1}{2}dx=\frac{1}{2}(\int \cos 4x\,dx+\int 1dx)=\frac{1}{2}(\frac{1}{4}\sin 4x+x+C_{31})=\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{2}x+C_3$

$\int \sin^4 x\,dx=\frac{1}{4}(x+C_1+\sin 2x+C_2+\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{2}x+C_3)=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$

(11) $\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{(x-2)^2}\Rightarrow x-5=A_1(x-2)^2+A_2(x+1)(x-2)+A_3(x+1)=(A_1+A_2)x^2+(-4A_1-A_2+A_3)x+(4A_1-2A_2+A_3)\Rightarrow A_1=-\frac{2}{3}, A_2=\frac{2}{3}, A_3=-1$

$\int \frac{x-5}{x^3-3x^2+4}dx=-\frac{2}{3}\int \frac{1}{x+1}dx+\frac{2}{3}\int \frac{1}{x-2}dx-\int \frac{1}{(x-2)^2}dx=-\frac{2}{3}\ln|x+1|+\frac{2}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{x-2}+C$

(12) 令 $t=1+\sqrt{x}$，则 $x=(t-1)^2$

$\int \arctan(1+\sqrt{x})\,dx = \int \arctan t \; d(t-1)^2 = (t-1)^2 \arctan t - \int (t-1)^2 d\arctan t$

令 $u=\arctan t$

$\int (t-1)^2 d\arctan t = \int (\tan u - 1)^2 du = \int \tan^2 u\, du - 2\int \tan u\, du + \int 1\, du$

$\int \tan^2 u\, du = \int (\sec^2 u - 1)\, du = \tan u - u + C_{11}$

$\int \tan u\, du = -\int \frac{1}{\cos u}\, d\cos u = -\ln|\cos u| + C_{12}$

$\int 1\, du = u + C_{13}$

$\int (t-1)^2 d\arctan t = (\tan u - u + C_{11}) - 2(-\ln|\cos u| + C_{12}) + (u + C_{13}) = \tan u + 2\ln|\cos u| + C_1 = t + 2\ln\left|\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right| + C_1$

$\int \arctan(1+\sqrt{x})\,dx = (t-1)^2\arctan t - \left(t + 2\ln\left|\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right| + C_1\right) = (t-1)^2\arctan t - t - 2\ln\left|\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right| + C = x\arctan(1+\sqrt{x}) - 1 - \sqrt{x} - 2\ln\left|\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x}+2}}\right| + C$

(13) $\int \frac{x^7}{x^4+2}\,dx = \int x^3\,dx - 2\int \frac{x^3}{x^4+2}\,dx$

$\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C_1$

$\int \frac{x^3}{x^4+2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^4+2}\,d(x^4+2) = \frac{1}{4}\ln|x^4+2| + C_2$

$\int \frac{x^7}{x^4+2}\,dx = \left(\frac{1}{4}x^4 + C_1\right) - 2\left(\frac{1}{4}\ln|x^4+2| + C_2\right) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\ln|x^4+2| + C$

(14) 令 $t=\tan x$，则 $dx = \frac{1}{t^2+1}\,dt$

$\int \frac{\tan x}{1+\tan x+\tan^2 x}\,dx = \int \frac{t}{(t^2+t+1)(t^2+1)}\,dt = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt - \int \frac{1}{t^2+t+1}\,dt = \arctan t - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C = x - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$

(15) 令 $t = 1-x$，则 $dx = -dt$

$\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx = -\int \frac{(1-t)^2}{t^{100}}\,dt = -\left(\int (t^{-98} - 2t^{-99} + t^{-100})\,dt\right) = -\left(-\frac{1}{97}t^{-97} + \frac{1}{49}t^{-98} - \frac{1}{99}t^{-99} + C_1\right) = \frac{1}{97}t^{-97} - \frac{1}{49}t^{-98} + \frac{1}{99}t^{-99} + C = \frac{1}{97}(1-x)^{-97} - \frac{1}{49}(1-x)^{-98} + \frac{1}{99}(1-x)^{-99} + C$

(16) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx = -\int \arcsin x\, d\frac{1}{x} = \int \frac{1}{x}\, d\arcsin x - \frac{\arcsin x}{x}$

令 $t = \arcsin x$

$\int \frac{1}{x}\, d\arcsin x = \int \csc t\, dt = \int \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\, dt = \int \frac{1}{\tan\frac{t}{2}}\, d\tan\frac{t}{2} = \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C$

$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| - \frac{\arcsin x}{x} + C$

(17) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx = \int x\ln(1+x)\,dx - \int x\ln(1-x)\,dx$

令 $t = x+1$，则 $dx = dt$

$\int x\ln(1+x)\,dx = \int (t-1)\ln t\, dt = \int t\ln t\, dt - \int \ln t\, dt$

$\int t\ln t\, dt = \frac{1}{2}\int \ln t\, dt^2 = \frac{1}{4}\int \ln t^2\, dt^2 = \frac{1}{4}\left(t^2\ln t^2 - \int t^2\, d\ln t^2\right) = \frac{1}{4}t^2\ln t^2 - \frac{1}{4}t^2 + C_{11}$

$\int \ln t\, dt = t\ln t - \int t\, d\ln t = t\ln t - t + C_{12}$

$\int x\ln(1+x)\,dx = \left(\frac{1}{4}t^2\ln t^2 - \frac{1}{4}t^2 + C_{11}\right) - (t\ln t - t + C_{12}) = \frac{1}{4}t^2\ln t^2 - \frac{1}{4}t^2 - t\ln t + t + C_1 = \frac{1}{4}(x+1)^2\ln(x+1)^2 - \frac{1}{4}(x+1)^2 - (x+1)\ln(x+1) + x + 1 + C_1$

令 $u = -x+1$，则 $dx = -du$

$\int x\ln(1-x)\,dx = -\int (1-u)\ln u\, du = \int u\ln u\, du - \int \ln u\, du = \frac{1}{4}u^2\ln u^2 - \frac{1}{4}u^2 - u\ln u + u + C_2 = \frac{1}{4}(1-x)^2\ln(1-x)^2 - \frac{1}{4}(1-x)^2 - (1-x)\ln(1-x) + 1 - x + C_2$

$\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx = \left(\frac{1}{4}(x+1)^2\ln(x+1)^2 - \frac{1}{4}(x+1)^2 - (x+1)\ln(x+1) + x + 1 + C_1\right) - \left(\frac{1}{4}(1-x)^2\ln(1-x)^2 - \frac{1}{4}(1-x)^2 - (1-x)\ln(1-x) + 1 - x + C_2\right)$

$= \frac{1}{4}(x+1)^2\ln(x+1)^2 - \frac{1}{4}(x+1)^2 - (x+1)\ln(x+1) + x + 1 - \frac{1}{4}(1-x)^2\ln(1-x)^2 + \frac{1}{4}(1-x)^2 + (1-x)\ln(1-x) - 1 + x + C$

(18) $\int \frac{1}{\sqrt{\sin x\cos^7 x}}\,dx = \int \tan^{-\frac{1}{2}}x\sec^4 x\,dx = \int \tan^{-\frac{1}{2}}x\sec^2 x\, d\tan x$

令 $t = \tan x$

$\int \frac{1}{\sqrt{\sin x\cos^7 x}}\,dx = \int \tan^{-\frac{1}{2}}x\sec^2 x\, d\tan x = \int t^{-\frac{1}{2}}(t^2+1)\,dt = \int (t^{\frac{3}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})\,dt = \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\tan^{\frac{5}{2}}x + 2\tan^{\frac{1}{2}}x + C$

(19) $\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx = \int e^x\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2}\right)dx = \int \frac{e^x}{1+x^2}\,dx - \int e^x\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{e^x}{1+x^2}\,dx + \int e^x\, d\frac{1}{1+x^2} = \int \frac{e^x}{1+x^2}\,dx + \frac{e^x}{1+x^2} - \int \frac{1}{1+x^2}\, de^x = \int \frac{e^x}{1+x^2}\,dx + \frac{e^x}{1+x^2} - \int \frac{e^x}{1+x^2}\,dx$

$= \frac{e^x}{1+x^2} + C$

(20) $I_n = \int \frac{v^n}{\sqrt{u}}\,dx = \frac{1}{b_1}\int \frac{v^n}{\sqrt{u}}\,du = \frac{2}{b_1}\int v^n\, d\sqrt{u} = \frac{2}{b_1}\left(v^n\sqrt{u} - \int \sqrt{u}\, dv^n\right)$

$\int \sqrt{u}\, dv^n = nb_2\int \sqrt{u}\cdot v^{n-1}\,dx = nb_2\int \frac{v^{n-1}}{\sqrt{u}}\cdot(a_1+b_1x)\,dx = nb_2a_1\int \frac{v^{n-1}}{\sqrt{u}}\,dx + nb_2b_1\int \frac{v^{n-1}}{\sqrt{u}}\cdot x\,dx$

$\int \frac{v^{n-1}}{\sqrt{u}}\cdot x\,dx = \frac{1}{b_2}\int \frac{v^{n-1}}{\sqrt{u}}\cdot(b_2x + a_2 - a_2)\,dx = \frac{1}{b_2}\int \frac{v^n}{\sqrt{u}}\,dx - \frac{a_2}{b_2}\int \frac{v^{n-1}}{\sqrt{u}}\,dx$

代入得：$I_n = \frac{2}{b_1}\sqrt{u}\cdot v^n - \frac{2na_1b_2}{b_1}I_{n-1} - 2nI_n + 2na_2I_{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{2}{b_1(1+2n)}\sqrt{u}\cdot v^n + \frac{2(na_2b_1 - nb_1a_2)}{b_1(1+2n)}I_{n-1}$

2.

(1) $\frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{B_1x+C_1}{x^2+x+1} + \frac{B_2x+C_2}{x^2-x+1} = (B_1x+C_1)(x^2-x+1) + (B_2x+C_2)(x^2+x+1) \Rightarrow (B_1+B_2)x^3 + (-B_1+C_1+B_2+C_2)x^2 + (B_1-C_1+B_2+C_2)x + (C_1+C_2) \Rightarrow B_1 = \frac{1}{2}, C_1 = \frac{1}{2}, B_2 = -\frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2-x+1}\,dx$

令 $u=x+\frac{1}{2}$，则 $dx=du$

$\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}du+\frac{1}{2}\int\frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}du=(\frac{1}{2}\ln|u^2+\frac{3}{4}|+C_{11})+\frac{1}{2}(\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}u)+C_{12})=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})+C_1$

令 $v=x-\frac{1}{2}$，则 $dx=dv$

$\int\frac{x-1}{x^2-x+1}dx=\int\frac{v}{v^2+\frac{3}{4}}dv-\frac{1}{2}\int\frac{1}{v^2+\frac{3}{4}}dv=(\frac{1}{2}\ln|v^2+\frac{3}{4}|+C_{21})-\frac{1}{2}(\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}v)+C_{22})=\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}})+C_2$

$\int\frac{1}{x^4+x+1}dx=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})+C_1)-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}})+C_2)$

$=\frac{1}{4}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})-\frac{1}{4}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}})+C$

(2) $\int\frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}dx=\frac{1}{5}\int\frac{x^5}{(x^{10}+2x^5+2)^2}dx^5$

令 $t=x^5$，$u=t+1$，则 $dt=du$

$\int\frac{x^5}{(x^{10}+2x^5+2)^2}dx^5=\int\frac{t}{(t^2+2t+2)^2}dt=\int\frac{u-1}{(u^2+1)^2}du=\int\frac{u}{(u^2+1)^2}du-\int\frac{1}{(u^2+1)^2}du$

$\int\frac{u}{(u^2+1)^2}du=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(u^2+1)^2}d(u^2+1)=-\frac{1}{2(u^2+1)}+C_{11}$

令 $v=\arctan u$，则 $u=\tan v$，$du=\sec^2v\,dv$

$\int\frac{1}{(u^2+1)^2}du=\int\cos^2v\,dv=\frac{1}{4}\int(\cos2v+1)d(2v)=\frac{1}{4}\sin2v+\frac{1}{2}v+C_2=\frac{u}{2(u^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan u+C_{12}$

$\int\frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}dx=(-\frac{1}{2(u^2+1)}+C_{11})-(\frac{u}{2(u^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan u+C_{12})=-\frac{u+1}{2(u^2+1)}-\frac{1}{2}\arctan u+C_1=-\frac{x^5+2}{2(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{1}{2}\arctan(x^5+1)+C_1$

$\int\frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}dx=\frac{1}{5}(-\frac{x^5+2}{2(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{1}{2}\arctan(x^5+1)+C_1)=-\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{1}{10}\arctan(x^5+1)+C$

(3) $\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx=\frac{1}{n}\int\frac{x^{2n}}{(x^{2n}+1)^2}dx^n$

令 $t=x^n$

$\int\frac{x^{2n}}{(x^{2n}+1)^2}dx^n=\int\frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt$

$\frac{t^2}{(t^2+1)^2}=\frac{B_1t+C_1}{t^2+1}+\frac{B_2t+C_2}{(t^2+1)^2}\Rightarrow t^2=(B_1t+C_1)(t^2+1)+(B_2t+C_2)\Rightarrow B_1t^3+C_1t^2+(B_1+B_2)t+(C_1+C_2)\Rightarrow B_1=0,\ C_1=1,\ B_2=0,\ C_2=-1$

$\int\frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{1}{t^2+1}dt-\int\frac{1}{(t^2+1)^2}dt$

$\int\frac{1}{t^2+1}dt=\arctan t+C_{11}$

$\int\frac{1}{(t^2+1)^2}dt=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan t+C_{12}$

$\int\frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt=(\arctan t+C_{11})-(\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan t+C_{12})=\frac{1}{2}\arctan t-\frac{t}{2(t^2+1)}+C_1$

$\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx=\frac{1}{n}(\frac{1}{2}\arctan t-\frac{t}{2(t^2+1)}+C_1)=\frac{1}{2n}\arctan t-\frac{t}{2n(t^2+1)}+C=\frac{1}{2n}\arctan x^n-\frac{x^n}{2n(x^{2n}+1)}+C$

(4) $\int\frac{\cos^3x}{\cos x+\sin x}dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin2x-\frac{1}{4}\sin^2x+\frac{1}{4}\ln|\sin x+\cos x|+C$

3.

(1) 令 $t=x^{\frac{1}{4}}$，则 $dx=4t^3dt$

$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=4\int t\sqrt[3]{1-t}\,dt$

令 $u=(1-t)^{\frac{1}{3}}$，则 $dt=3u^2du$

$\int t\sqrt[3]{1-t}\,dt=3\int(u^6-u^3)du=\frac{3}{7}u^7-\frac{3}{4}u^4+C_1=\frac{3}{7}(1-t)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{4}(1-t)^{\frac{4}{3}}+C_1$

$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=4(\frac{3}{7}(1-t)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{4}(1-t)^{\frac{4}{3}}+C_1)=\frac{12}{7}(1-t)^{\frac{7}{3}}-3(1-t)^{\frac{4}{3}}+C=\frac{12}{7}(1-x^{\frac{1}{4}})^{\frac{7}{3}}-3(1-x^{\frac{1}{4}})^{\frac{4}{3}}+C$

(2) 令 $t=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$，则 $dx=-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt$

$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx=-\int\frac{t^2}{t^4-1}dt=\frac{1}{4}\ln|t+1|-\frac{1}{4}\ln|t-1|-\frac{1}{2}\arctan t+C=\frac{1}{4}\ln|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+1|-\frac{1}{4}\ln|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}-1|-\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C$

(3) 令 $\sqrt{x^2-x+1}=x-t$，则 $x=\frac{t^2-1}{2t-1}$，$dx=\frac{2t^2-2t+2}{4t^2-4t+1}dt$

$\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}dx=\int\frac{2t^2-2t+2}{2t^2-5t+2}dt=\int1dt+3\int\frac{t}{2t^2-5t+2}dt$

$\int1dt=t+C_1$

$\frac{t}{2t^2-5t+2}=\frac{A_1}{2t-1}+\frac{A_2}{t-2}\Rightarrow 1=A_1(t-2)+A_2(2t-1)=(A_1+2A_2)t+(-2A_1-A_2)\Rightarrow A_1=-\frac{1}{3},\ A_2=\frac{2}{3}$

$\int\frac{t}{2t^2-5t+2}dt=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{2t-1}dt+\frac{2}{3}\int\frac{1}{t-2}dt=-\frac{1}{6}\ln|2t-1|+\frac{2}{3}\ln|t-2|+C_2$

$\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}dx=(t+C_1)+3(-\frac{1}{6}\ln|2t-1|+\frac{2}{3}\ln|t-2|+C_2)=t-\frac{1}{2}\ln|2t-1|+2\ln|t-2|+C=x-\sqrt{x^2-x+1}-\frac{1}{2}\ln|2x-2\sqrt{x^2-x+1}-1|+2\ln|x-\sqrt{x^2-x+1}-2|+C$

(4) $\int\frac{1+x^4}{\sqrt{1-x^4}}dx=\int\frac{(1-x^4+2x^4)(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}}{1-x^4}dx=\int\frac{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}+2x^4(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}}{((1-x^4)^{\frac{1}{2}})^2}dx=\int1\,d\frac{x}{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x}{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}}+C$

4. 设 $f(x+T)=f(x)$

则 $F(x+T)=F(x)+\int_x^{x+T}f(u)dx$

故不一定是

5.

(1) 记 $I_n=\int \frac{1}{\cos^n x}dx$

当 $n=1$ 时, $I_1=\int \sec x\,dx=\ln|\tan x+\sec x|+C$

当 $n=2$ 时, $I_2=\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$

当 $n\geq 3$ 时, $I_n=\int \sec^n x\,dx=\int \sec^{n-2}x\,d\tan x=\tan x\sec^{n-2}x-\int \tan x\,d\sec^{n-2}x$

$\int \tan x\,d\sec^{n-2}x=(n-2)\int \tan^2 x\sec^{n-2}x\,dx=(n-2)(\int \sec^n x\,dx+\int \sec^{n-2}x\,dx)=(n-2)(I_n+I_{n-2})$

$\Rightarrow I_n=\tan x\sec^{n-2}x-(n-2)I_n-(n-2)I_{n-2}$

$\Rightarrow I_n=\frac{1}{n-1}\tan x\sec^{n-2}x+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$

(2) 记 $I_n=\int \frac{\sin nx}{\sin x}dx$

当 $n=1$ 时, $I_1=\int 1\,dx=x+C$

当 $n=2$ 时, $I_2=\int 2\cos x\,dx=2\sin x+C$

当 $n\geq 3$ 时, $I_n=\int \frac{\sin[(n-1)x+x]}{\sin x}+C=\int \cos(n-1)x\,dx+\int \frac{\sin(n-1)\cos x}{\sin x}dx$

$\int \cos(n-1)x\,dx=\frac{1}{n-1}\sin(n-1)x+C_1$

$\int \frac{\sin(n-1)\cos x}{\sin x}dx=\frac{1}{2}\int \frac{\sin nx+\sin(n-2)x}{\sin x}dx=\frac{1}{2}I_n+\frac{1}{2}I_{n-2}$

$\Rightarrow I_n=\frac{1}{n-1}\sin(n-1)x+C_1+\frac{1}{2}I_n+\frac{1}{2}I_{n-2}$

$\Rightarrow I_n=\frac{2}{n-1}\sin(n-1)x+I_{n-2}$

习 题 9.1

1. 按定积分定义证明：$\int_a^b k\mathrm{d}x = k(b-a)$.

2. 通过对积分区间作等分分割，并取适当的点集 $\{\xi_i\}$，把定积分看作是对应的积分和的极限，来计算下列定积分：

(1) $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$；$\left(\text{提示：}\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.\right)$

(2) $\int_0^1 e^x\mathrm{d}x$；　　(3) $\int_a^b e^x\mathrm{d}x$；

(4) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2}(0<a<b)$.（提示：取 $\xi_i = \sqrt{x_{i-1}x_i}$.）

1. 已知 $\int_a^b k\,dx$ 存在，则令 $\Delta = b-a$，取等分分割 $T=\{a, a+\frac{1}{n}\Delta, a+\frac{2}{n}\Delta, \dots, a+\frac{n-1}{n}\Delta, b\}$，$\|T\| = \frac{1}{n}\Delta$，$\xi_i = a+\frac{i-1}{n}\Delta \in \Delta_i$，$i=1,\dots,n$

则 $S = \lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} k\Delta x_i = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} k\left(\frac{1}{n}\Delta\right) = k\Delta = k(b-a)$

$\Rightarrow \int_a^b k\,dx = k(b-a)$

2.

(1) $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$

(2) $\int_0^1 e^x dx = e$

(3) $\int_a^b e^x dx = e^b - a^a$

(4) $\int_a^b \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

习 题 9.2

1. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^1 (2x+3)\,dx$；　(2) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}dx$；

(3) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$；　(4) $\int_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{2}dx$；

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x\,dx$；　(6) $\int_4^9 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$；

(7) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$；　(8) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x}(\ln x)^2 dx$.

2. 利用定积分求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(1+2^3+\cdots+n^3)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right]$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$.

3. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上可积，F 在 $[a,b]$ 上连续，且除有限个点外有 $F'(x)=f(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

1.

(1) $\int (2x+3)\,dx = x^2+3x+C$

$\int_0^1 (2x+3)\,dx = (x^2+3x+C)\Big|_0^1 = 4$

(2) $\int \frac{1-x^2}{1+x^2}dx = -\int 1\,dx + 2\int \frac{1}{1+x^2}dx = -x+2\arctan x + C$

$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}dx = (-x+2\arctan x+C)\Big|_0^1 = -1+2\arctan 1$

(3) $\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{1}{\ln x}d\ln x = \ln|\ln x| + C$

$\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx = (\ln|\ln x|+C)\Big|_e^{e^2} = \ln 2$

(4) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{2}dx = \frac{e^x+e^{-x}}{2}+C$

$\int_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{2}dx = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+C\right)\Big|_0^1 = \frac{e}{2}+\frac{1}{2e}-1$

(5) $\int \tan^2 x\,dx = \int(\sec^2 x-1)\,dx = \tan x - x + C$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x\,dx = (\tan x - x + C)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

(6) $\int (\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$

$\int_4^9 (\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})\,dx = (\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C)\Big|_4^9 = \frac{44}{3}$

(7) 令 $t=x^{\frac{1}{2}}$，则 $dx=2t\,dt$

$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{2t}{1+t}dt = 2\int 1\,dt - 2\int \frac{1}{1+t}dt = 2t-2\ln|1+t|+C = 2x^{\frac{1}{2}}-2\ln|1+x^{\frac{1}{2}}|+C$

$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = (2x^{\frac{1}{2}}-2\ln|1+x^{\frac{1}{2}}|+C)\Big|_0^4 = 4-2\ln 3$

(8) $\int \frac{1}{x}(\ln x)^2 dx = \int (\ln x)^2 d\ln x = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$

$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x}(\ln x)^2 dx = (\frac{1}{3}(\ln x)^3+C)\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} = \frac{2}{3}$

2.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4}(1^3+2^3+\cdots+n^3) = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^3\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 x^3\,dx = (\frac{1}{4}x^4+C)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{(n+i)^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx = (-\frac{1}{1+x}+C)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx = (\arctan x + C)\Big|_0^1 = \arctan 1$

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\sin\frac{i\pi}{n})\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 \sin\pi x\,dx = (-\frac{1}{\pi}\cos\pi x + C)\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}$

习 题 9.3

1. 证明：若 T' 是 T 增加若干个分点后所得的分割，则 $\sum\limits_{T'}\omega_i'\Delta x_i' \leqslant \sum\limits_{T}\omega_i\Delta x_i$.

2. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上可积，$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，则 f 在 $[\alpha,\beta]$ 上也可积.

3. 设 f,g 均为定义在 $[a,b]$ 上的有界函数，仅在有限个点处 $f(x)\neq g(x)$. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 g 在 $[a,b]$ 上也可积，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

4. 设 f 在 $[a,b]$ 上有界，$\{a_n\}\subset[a,b]$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上只有 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 为其间断点，则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

5. 证明：若 f 在区间 Δ 上有界，则

$$\sup_{x\in\Delta}f(x)-\inf_{x\in\Delta}f(x)=\sup_{x',x''\in\Delta}|f(x')-f(x'')|.$$

6. 证明函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right], & x\in(0,1]\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上可积.

7. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上有定义，且对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $[a,b]$ 上的可积函数 g，使得

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon,\quad x\in[a,b].$$

证明 f 在 $[a,b]$ 上可积.

---

1. $\forall \xi\in\Delta_i=[a,b]$，记 $M_0=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，$M_1=\sup\limits_{x\in[a,\xi]}f(x)$，$M_2=\sup\limits_{x\in[\xi,b]}f(x)$，$m_0=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，$m_1=\inf\limits_{x\in[a,\xi]}f(x)$，$m_2=\inf\limits_{x\in[\xi,b]}f(x)$，则 $M_1\le M_0$，$M_2\le M_0$，$m_1\ge m_0$，$m_2\ge m_0$

$\Rightarrow M_1-m_1\le M_0-m_0$，$M_2-m_2\le M_0-m_0$

$\Rightarrow (M_1-m_1)(\xi-a)+(M_2-m_2)(b-\xi)\le(M_0-m_0)(\xi-a)+(M_0-m_0)(b-\xi)=(M_0-m_0)(b-a)$

即证

2. f 在 $[a,b]$ 上可积 $\Rightarrow \exists T=\{a=x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x_n=b\}$，$\sum\limits_T\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$

设 $x_s\le\alpha<x_{s+1}\le x_{t-1}<\beta\le x_t$，则令 $T'=\{\alpha,x_{s+1},\dots,x_{t-1},\beta\}$，$\sum\limits_{T'}\omega_i\Delta x_i\le\sum\limits_{i=s}^{t}\omega_i\Delta x_i\le\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$

$\Rightarrow f$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积

3. f 在 $[a,b]$ 上可积 $\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上有界 $\Rightarrow g$ 在 $[a,b]$ 上有界 $\Rightarrow \exists M>0$ s.t. $\forall x\in[a,b]$，$|g(x)|\le M$，则 $\omega_i^g\le 2M$

设 $\{d\mid f(d)\neq g(d),\ d\in[a,b]\}=\{d_1,d_2,\dots,d_k\}$.

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\|T\|\in(0,\frac{\varepsilon}{8Mk})$ s.t. $\sum\limits_T\omega_i^f\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$

将 $T=\{\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_n\}$ 分为 $\{\Delta_i'\mid i=1,2,\dots,m\}$，$\{\Delta_i''\mid i=1,2,\dots,n-m\}$，其中 $\{\Delta_i'\}$ 为所有含有 $\{\xi_i\}$ 的区间，则 $m\le 2k$，$\{\Delta_i''\}$ 为不含 $\{\xi_i\}$ 的区间.

则 $\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i'\Delta x_i'\le 2M\sum\limits_{i=1}^{m}\Delta x_i'\le 2M\cdot 2k\|T\|<\frac{\varepsilon}{2}$

又 $\sum\limits_{i=1}^{n-m}\omega_i''\Delta x_i''=\sum\limits_{i=1}^{n-m}\omega_i^f\Delta x_i''\le\sum\limits_T\omega_i^f\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$

故 $\sum\limits_T\omega_i^g\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\Rightarrow g$ 在 $[a,b]$ 上可积

又 $\forall\Delta_i$，$\exists\xi_i\in\Delta_i$ s.t. $f(\xi_i)=g(\xi_i)\Rightarrow\int_a^b g(x)dx=\lim\limits_{\|T\|\to0}\sum\limits_T g(\xi_i)\Delta x_i=\lim\limits_{\|T\|\to0}\sum\limits_T f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$

4. f 在 $[a,b]$ 上有界 $\Rightarrow\exists M>0$ s.t. $\forall x\in[a,b]$ s.t. $|f(x)|<M$，则 $\omega_i<2M$

$\forall T=\{\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_n\}$，设 $c\in\Delta_r$，令 $\delta=\min\{c-x_{r-1},x_r-c\}$，则由 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=c\Rightarrow\exists N>0$ s.t. $\forall n>N$，$a_n\in U(c,\delta)\subseteq\Delta_r$

再记 $\{\Delta_i'\mid i=1,2,\dots,m-1\}$ 为所有含有 $\{a_i\mid i=1,2,\dots,N\}$ 的区间，$\Delta_m'=\Delta_r$，则 $m\le 2N+1$，$\{\Delta_i''\mid i=1,2,\dots,n-m\}=T\setminus\{\Delta_i'\}$ 为所有不含 $\{a_i\}$ 的区间.

又令 $\hat f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{y\to x}f(y), & x\in\{a_n\}\\ f(x), & \text{else}\end{cases}$，则 $\hat f$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow\hat f$ 在 $[a,b]$ 上可积

则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists T$ 满足 $\|T\|<\frac{\varepsilon}{4M(2N+1)}$ s.t. $\sum\limits_T\omega_i^{\hat f}\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$

此时，$\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i'\Delta x_i'\le 2M\sum\limits_{i=1}^{m}\Delta x_i'\le 2M\cdot(2N+1)\|T\|<\frac{\varepsilon}{2}$，$\sum\limits_{i=1}^{n-m}\omega_i''\Delta x_i''=\sum\limits_{i=1}^{n-m}\omega_i^{\hat f}\Delta x_i''\le\sum\limits_T\omega_i^{\hat f}\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow\sum\limits_T\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上可积

5. $\forall x',x''\in\Delta$，不妨设 $f(x')\ge f(x'')$

$f(x')\le\sup\limits_{x\in\Delta}f(x)$，$f(x'')\ge\inf\limits_{x\in\Delta}f(x)\Rightarrow|f(x')-f(x'')|=f(x')-f(x'')\le\sup\limits_{x\in\Delta}f(x)-\inf\limits_{x\in\Delta}f(x)$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists x',x''\in\Delta$ s.t. $f(x')>\sup\limits_{x\in\Delta}f(x)-\frac{\varepsilon}{2}$，$f(x'')<\inf\limits_{x\in\Delta}f(x)+\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow|f(x')-f(x'')|>\sup\limits_{x\in\Delta}f(x)-\inf\limits_{x\in\Delta}f(x)-\varepsilon$

综上，$\sup\limits_{x\in\Delta}f(x)-\inf\limits_{x\in\Delta}f(x)=\sup\limits_{x',x''\in\Delta}|f(x')-f(x'')|$

6. 令 $a_n=\begin{cases}0, & n=1\\ \frac{1}{n}, & n\ge2\end{cases}$ 则 $\{a_i\}$ 即为 f 在 $[0,1]$ 上的所有间断点

$\forall x\in[0,1]$，$f(x)\in[0,1)\Rightarrow\forall T$，$\omega_i<1$

$\forall\varepsilon>0$，在 $[\frac{\varepsilon}{2},1]$ 上，$f(x)$ 只有有限个间断点 $\Rightarrow f$ 在 $[\frac{\varepsilon}{2},1]$ 上可积 $\Rightarrow$ 存在一个对于 $[\frac{\varepsilon}{2},1]$ 的分割 T_2 使得 $\sum\limits_{T_2}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$

又 $\forall$ 对于 $[0,\frac{\varepsilon}{2}]$ 的 T_1，$\sum\limits_{T_1}\omega_i\Delta x_i<1\cdot\sum\limits_{T_1}\Delta x_i=\frac{\varepsilon}{2}$

故 $\exists$ 对于 $[0,1]$ 的 $T=T_1\cup T_2$，$\sum\limits_T\omega_i\Delta x_i=\sum\limits_{T_1}\omega_i\Delta x_i+\sum\limits_{T_2}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$\Rightarrow f$ 在 $[0,1]$ 上可积

7. $\forall\varepsilon>0$，$\exists g\in D[a,b]$ s.t. $\forall x\in[a,b]$，$|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$

g 在 $[a,b]$ 上可积 $\Rightarrow\exists$ 对于 $[a,b]$ 的分割 T s.t. $\sum\limits_T\omega_i^g\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall x\in\Delta_i$，$|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}\Rightarrow\omega_i^f<\omega_i^g+\frac{2\varepsilon}{b-a}$

$\Rightarrow \sum_T \omega_i^f \Delta x_i < \sum_T \omega_i^g \Delta x_i + \frac{2\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_T \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上可积

习 题 9.4

1. 证明：若 f 与 g 都在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

其中 ξ_i, η_i 是 T 所属小区间 Δ_i 中的任意两点，$i=1,2,\cdots,n$.

2. 不求出定积分的值，比较下列各对定积分的大小：

(1) $\int_0^1 x\,dx$ 与 $\int_0^1 x^2\,dx$； (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$.

3. 证明下列不等式：

(1) $\dfrac{\pi}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}} < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$； (2) $1 < \int_0^1 e^{x^2}dx < e$；

(3) $1 < \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx < \frac{\pi}{2}$； (4) $3\sqrt{e} < \displaystyle\int_e^{4e} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx < 6$.

4. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 不恒等于零，证明 $\int_a^b (f(x))^2dx > 0$.

5. 设 f 与 g 都在 $[a,b]$ 上可积，证明

$$M(x) = \max_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\},\quad m(x) = \min_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}$$

在 $[a,b]$ 上也都可积.

6. 试求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 上各点极径的平均值.

---

7. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积，且在 $[a,b]$ 上满足 $|f(x)|\geqslant m>0$. 证明 $\dfrac{1}{f}$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

8. 进一步证明积分第一中值定理（包括定理 9.7 和定理 9.8）中的中值点 $\xi\in(a,b)$.

9. 证明：若 f 与 g 都在 $[a,b]$ 上可积，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，M,m 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上、下确界，则必存在某实数 $\mu(m\leqslant\mu\leqslant M)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx.$$

10. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b xf(x)\,dx = 0$，则在 (a,b) 上至少存在两点 x_1,x_2，使 $f(x_1)=f(x_2)=0$. 又若 $\int_a^b x^2f(x)\,dx=0$，这时 f 在 (a,b) 上是否至少有三个零点？

11. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)>0$. 证明：

(1) $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$；

(2) 又若 $f(x)\leqslant 0$，$x\in[a,b]$，则又有

$$f(x) \geqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,\quad x\in[a,b].$$

12. 证明：

(1) $\ln(1+n) < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\ln n$；

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n} = 1$.

1. f,g 在 $[a,b]$ 上可积 $\Rightarrow fg$ 在 $[a,b]$ 上可积，记 $\int_a^b f(x)g(x)dx = J$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ s.t. 若 $\|T\|<\delta$，$\left|\sum_T f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i - J\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

f,g 在 $[a,b]$ 上可积 $\Rightarrow f,g$ 在 $[a,b]$ 上有界 $\Rightarrow fg$ 在 $[a,b]$ 上有界 $\Rightarrow \exists M>0$ s.t. $\forall x\in[a,b]$，$|f(x)g(x)|<M$

$\Rightarrow |f(\xi_i)g(\eta_i) - f(\xi_i)g(\xi_i)| < 2M$

则 $\forall\varepsilon>0$，当 $\|T\|<\frac{\varepsilon}{4Mn}$ 时，$\left|\sum_{i=1}^n (f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i - f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i)\right| < n\cdot 2M\cdot\frac{\varepsilon}{4Mn} = \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ 当 $\|T\|<\min\{\delta,\frac{\varepsilon}{4Mn}\}$ 时，$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i - J\right| \leq \left|\left|\sum_{i=1}^n (f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i - f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i)\right| + \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i - J\right|\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{\|T\|\to 0} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x)dx$

2.

(1) $\forall x\in(0,1)$，$x>x^2 \Rightarrow \int_0^1 x\,dx > \int_0^1 x^2dx$

(2) $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$x>\sin x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

3.

(1) $\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x} < 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}} > 1 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$

$\sqrt{2-\sin^2 x} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}} < \sqrt{2} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(2) $1 < e^{x^2} < e^x \Rightarrow \int_0^1 1\,dx < \int_0^1 e^{x^2}dx < \int_0^1 e^x dx \Rightarrow 1 < \int_0^1 e^{x^2}dx < e-1 < e$

(3) $x<\tan x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\tan x} = \cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = 1$

$x>\sin x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$

(4) 记 $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$，$x\in(e,4e) \Rightarrow f'(x) = \frac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}$，$x\in(e,4e) \Rightarrow f(x)$ 在 $(e,e^2)\nearrow$ $(e^2,4e)\searrow$

$f(e)=\frac{1}{\sqrt{e}}$，$f(e^2)=\frac{2}{e}$，$f(4e)=\frac{\ln 4+1}{2\sqrt{e}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{e} \Rightarrow \int_e^{4e}\frac{1}{\sqrt{e}}dx < \int_e^{4e}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx < \int_e^{4e}\frac{2}{e}dx \Rightarrow 3\sqrt{e} < \int_e^{4e}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx < 6$

4. $\exists x_0\in[a,b]$ s.t. $f(x_0)\neq 0$，不妨设 $f(x_0)>0$

f 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow \exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in U(x_0;\delta)$，$f(x) > \frac{1}{2}f(x_0) > 0 \Rightarrow (f(x))^2>0 \Rightarrow \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}(f(x))^2dx > 0$

$\forall x\in[a,x_0-\delta]\cup[x_0+\delta,b]$，$(f(x))^2\geqslant 0 \Rightarrow \int_a^{x_0-\delta}(f(x))^2dx \geqslant 0$，$\int_{x_0+\delta}^b (f(x))^2dx \geqslant 0$

$\Rightarrow \int_a^b (f(x))^2dx = \int_a^{x_0-\delta}(f(x))^2dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}(f(x))^2dx + \int_{x_0+\delta}^b (f(x))^2dx > 0$

5. f,g 在 $[a,b]$ 上可积 $\Rightarrow f\pm g$ 在 $[a,b]$ 上可积 $\Rightarrow |f\pm g|$ 在 $[a,b]$ 上可积

$M(x) = \frac{(f(x)+g(x))+|f(x)-g(x)|}{2}$，$m(x) = \frac{(f(x)+g(x))-|f(x)-g(x)|}{2}$

$\Rightarrow M, m$ 在 $[a,b]$ 上可积

6. $\bar{r} = \frac{1}{2\pi-0}\int_0^{2\pi} r(\theta)\,d\theta = a$

7. $|f(x)|\geqslant m>0 \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| \leq \frac{1}{m}$

f 在 $[a,b]$ 上可积 $\Rightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists T$ s.t. $\sum_T \omega_i^f\Delta x_i < m^2\varepsilon$

$\forall x_1, x_2 \in \Delta_i, \left|\frac{1}{f(x_1)} - \frac{1}{f(x_2)}\right| = \left|\frac{1}{f(x_1)}\right|\left|\frac{1}{f(x_2)}\right|\left|f(x_1)-f(x_2)\right| \Rightarrow \omega_i^{\frac{1}{f}} \le \frac{1}{m^2}\omega_i^{f}$

$\Rightarrow \sum_T \omega_i^{\frac{1}{f}}\Delta x_i < \frac{1}{m^2}\cdot m^2\varepsilon = \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{f}$在$[a,b]$上可积

8. 略

9. 由推广的积分第一中值定理得，$\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$

显然 $m \le f(\xi) \le M$，则令$\mu = f(\xi)$即可

10.

(1) 假设f在(a,b)上无零点

f在$[a,b]$上连续$\Rightarrow$不妨设$f(x)>0$，则$\int_a^b f(x)\,dx>0$，矛盾！

故f在(a,b)上至少有一个零点

假设f在(a,b)上只有一个零点

设$x_1\in(a,b)$，$f(x_1)=0$，又f在$[a,b]$上连续$\Rightarrow$不妨设$\forall x\in[a,x_1)$，$f(x)<0$，$\forall x\in(x_1,b]$，$f(x)>0$

则$\int_a^b (x-x_1)f(x)\,dx = \int_a^{x_1}(x-x_1)f(x)\,dx + \int_{x_1}^b (x-x_1)f(x)\,dx > 0$

又$\int_a^b (x-x_1)f(x)\,dx = \int_a^b xf(x)\,dx - x_1\int_a^b f(x)\,dx = 0$，矛盾！

故f在(a,b)上至少有两个零点.

(2) 假设f在(a,b)上只有两个零点

设$x_1,x_2\in(a,b)$，$x_1<x_2$，$f(x_1)=f(x_2)=0$，又f在$[a,b]$上连续$\Rightarrow f$在(a,x_1)，(x_1,x_2)，(x_2,b)上分别不变号

假设f在(x_1,x_2)，(x_2,b)上同号

则f在(a,x_1)，(x_1,b)上异号

$\int_a^b (x-x_1)f(x)\,dx = \int_a^{x_1}(x-x_1)f(x)\,dx + \int_{x_1}^b (x_1-x)f(x)\,dx \ne 0$

又$\int_a^b (x-x_1)f(x)\,dx = \int_a^b xf(x)\,dx - x_1\int_a^b f(x)\,dx = 0$，矛盾！

故f在(x_1,x_2)，(x_2,b)上异号

同理 f在(a,x_1)，(x_1,x_2)上异号

不妨设$\forall x\in(a,x_1)$，$f(x)>0$，$\forall x\in(x_1,x_2)$，$f(x)<0$，$\forall x\in(x_2,b)$，$f(x)>0$

则$\int_a^b (x-x_1)(x-x_2)f(x)\,dx = \int_a^{x_1}(x-x_1)(x-x_2)f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)f(x)\,dx + \int_{x_2}^b (x-x_1)(x-x_2)f(x)\,dx > 0$

又$\int_a^b (x-x_1)(x-x_2)f(x)\,dx = \int_a^b x^2f(x)\,dx - (x_1+x_2)\int_a^b xf(x)\,dx + x_1x_2\int_a^b f(x)\,dx = 0$，矛盾！

故f在(a,b)上至少有三个零点

11.

(1) $f''(x)\ge 0 \Rightarrow f$在$[a,b]$上凸$\Rightarrow \forall x_1,x_2\in[a,b]$，$f(x_2)\ge f'(x_1)(x_2-x_1)$

令$g(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})$，$x\in[a,b] \Rightarrow \forall x\in[a,b]$，$f(x)\ge g(x)$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx = f(\frac{a+b}{2})\int_a^b 1\,dx + f'(\frac{a+b}{2})\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})\,dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$

$\Rightarrow f(\frac{a+b}{2}) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

(2) $\forall x,t\in[a,b]$，$f(x)\ge f(t)+f'(t)(x-t)$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dt \ge \int_a^b (f(t)+f'(t)(x-t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + x\int_a^b f'(t)\,dt - \int_a^b tf'(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + x\int_a^b f'(t)\,dt - \int_a^b t\,df(t)$

$\Rightarrow f(x)\cdot(b-a) \ge \int_a^b f(t)\,dt + x(f(b)-f(a)) - (tf(t)\big|_a^b - \int_a^b f(t)\,dt)$

$= 2\int_a^b f(x)\,dx + x(f(b)-f(a)) - (bf(b)-af(a))$

又 $x(f(b)-f(a)) - (bf(b)-af(a)) = (x-b)f(b) + (a-x)f(a) \ge 0$

$\Rightarrow f(x)\cdot(b-a) \ge 2\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow f(x) \ge \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

12.

(1) 令$f(x)=\frac{1}{x}$

$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_T f(\xi_i)\Delta x_i \le \lim_{\|T\|\to 0}\sum_T M_i\Delta x_i = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_T \frac{1}{x_i}\cdot\Delta x_i$

则当$T'=\{1,2,\dots,n,n+1\}$时，$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \sum_{T'}\frac{1}{x_i} \ge \lim_{\|T\|\to 0}\sum_T \frac{1}{x_i}\Delta x_i \ge \int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1)$

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_T g(\xi_i)\Delta x_i \geq \lim_{\|T\|\to 0} \sum_T m_i \Delta x_i = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_T \frac{1}{x_{i+1}} \Delta x_i$$

则当 $T'' = \{1, 2, \dots, n-1, n\}$ 时，$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} = \sum_{T''} \frac{1}{x_{i+1}} \leq \lim_{\|T\|\to 0} \sum_T \frac{1}{x_{i+1}} \Delta x_i \leq \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln n$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq 1 + \ln n$$

(2) 由(1)知，$\frac{\ln(1+n)}{\ln n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}{\ln n} \leq \frac{1+\ln n}{\ln n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+n)}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\ln n}{\ln n} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}{\ln n} = 1$$

习 题 9.5

1. 设 f 为连续函数，u,v 均为可导函数，且可实行复合 $f\circ u$ 与 $f\circ v$. 证明：

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

2. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)=\int_a^x f(t)(x-t)\,dt$. 证明 $F''(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$.

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\,dt$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$.

4. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin 2x\,dx$；　(2) $\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$；

(3) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx\ (a>0)$；　(4) $\int_0^1\frac{dx}{(x^2-x+1)^{3/2}}$；

(5) $\int_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$；　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$；

(7) $\int_0^1\arcsin x\,dx$；　(8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx$；

(9) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx$；　(10) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$；

(11) $\int_0^a x^2\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx\ (a>0)$；　(12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$.

5. 设 f 在 $[-a,a]$ 上可积. 证明：

(1) 若 f 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$；

(2) 若 f 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$.

6. 设 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 上以 p 为周期的连续周期函数. 证明对任何实数 a，恒有

$$\int_a^{a+p}f(x)\,dx=\int_0^p f(x)\,dx.$$

7. 设 f 为连续函数. 证明：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\,dx$；

(2) $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\,dx$.

8. 设 $J(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx$ (m,n 为正整数). 证明：

$$J(m,n)=\frac{n-1}{m+n}J(m,n-2)=\frac{m-1}{m+n}J(m-2,n),$$

并求 $J(2m,2n)$.

9. 证明：若在 $(0,+\infty)$ 上 f 为连续函数，且对任何 $a>0$ 有

$$g(x)=\int_x^{ax}f(t)\,dt=\text{常数},\quad x\in(0,+\infty),$$

则 $f(x)=\frac{c}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，c 为常数.

10. 设 f 为连续可微函数，试求

$$\frac{d}{dx}\int_a^x(x-t)f'(t)\,dt,$$

并用此结果求 $\frac{d}{dx}\int_0^x(x-t)\sin t\,dt$.

11. 设 $y=f(x)$ 为 $[a,b]$ 上严格增的连续曲线（图 9-12）. 试证存在 $\xi\in(a,b)$，使图中两阴影部分面积相等.

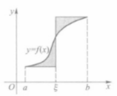


图 9-12

12. 设 f 为 $[0,2\pi]$ 上的单调递减函数. 证明：对任何正整数 n，恒有

$$\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx\geqslant 0.$$

13. 证明：当 $x>0$ 时有不等式

$$\left|\int_x^{x+c}\sin t^2\,dt\right|\leqslant\frac{1}{x}\ (c>0).$$

14. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上可积，φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上严格单调且 φ' 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积，$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，则有

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

15. 若 f 在 $[a,b]$ 上连续可微，则存在 $[a,b]$ 上连续可微的增函数 g 和连续可微的减函数 h，使得

$$f(x)=g(x)+h(x),\quad x\in[a,b].$$

*16. 证明：若在 $[a,b]$ 上 f 为连续函数，g 为连续可微的单调函数，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

（提示：与定理 9.11 及其推论相比较，这里的条件要强得多，因此可给出一个比较简单的、不同于定理 9.11 的证明.）

1. 由原函数存在定理可知，$\int f(u(x))\,du(x)=\int_a^{u(x)}f(t)\,dt+C_1$，$\int f(v(x))\,dv(x)=\int_a^{v(x)}f(t)\,dt+C_2$

$\Rightarrow \int f(v(x))v'(x)\,dx-\int f(u(x))u'(x)\,dx=\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\,dt+C$

两边对 x 求导得 $f(v(x))v'(x)-f(u(x))u'(x)=\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\,dt$

2. $F(x)=\int_a^x f(t)(x-t)\,dt=x\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^x tf(t)\,dt$

$\Rightarrow F'(x)=\int_a^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

$\Rightarrow F''(x)=f(x)$

3.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x\cos t^2\,dt=\lim\limits_{x\to0}\cos x^2=1$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

4.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5x\sin2x\,dx=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6x\,d\cos x=-2\int_1^0 t^6\,dt=\frac{2}{7}$

(2) 令 $x=2\sin t$，则 $dx=2\cos t\,dt$

$\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-(2\sin t)^2}\cdot2\cos t\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2t\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos2t+1)\,dt=2\left(\frac{1}{2}\sin2t+t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt3}{2}+\frac{\pi}{3}$

(3) 令 $x=a\sin t$，则 $dx=a\cos t\,dt$

$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos^2t\,dt=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2t-\cos^4t)\,dt=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\,dt-a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\,dt$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos2t+1)\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin2t+t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}\pi$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2t)^2\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos2t-1)^2\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^22t-2\cos2t+1)\,dt=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\sin4t-\sin2t+\frac{3}{2}t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{16}\pi$

$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^4}{16}\pi$

(4) 令 $t=x-\frac{1}{2}$，则 $dx=dt$

$\int_0^1\frac{1}{(x^2-x+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(t^2+\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}}}\,dt$

令 $t=\frac{\sqrt3}{2}\tan u$，则 $dt=\frac{\sqrt3}{2}\sec^2u\,du$

$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(t^2+\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}}}\,dt=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos u\,du=\frac{4}{3}\sin u\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{4}{3}$

$\int_0^1\frac{1}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx=\frac{4}{3}$

(5) $\int_0^1\frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx=\int_0^1\frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx=\int_0^1\frac{1}{e^{2x}+1}\,de^x=\arctan e^x\Big|_0^1=\arctan e-\frac{\pi}{4}$

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin^2x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin^2x}\,d\sin x=\arctan(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

(7) 令 $t=\arcsin x$，则 $dx=\cos t\,dt$

$\int_0^1\arcsin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\,d\sin t=t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=(t\sin t+\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$

(8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,de^x=e^x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\,d\sin x=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,de^x=e^{\frac{\pi}{2}}-\left(e^x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\,d\cos x\right)=e^{\frac{\pi}{2}}+1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx$

$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$

(9) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x dx+\int_{1}^{e}\ln x dx=-(x\ln x-x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+(x\ln x-x)\Big|_{1}^{e}=2-\frac{2}{e}$

(10) 令 $t=\sqrt{x}$, 则 $dx=2t\,dt$

$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx=\int_0^1 2te^t dt=2\int_0^1 t\,de^t=2\left(te^t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t dt\right)=2\left(e-e^t\Big|_0^1\right)=2$

(11) $\int_0^a x^2\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx=\int_0^a\frac{x^2(a-x)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

令 $x=a\sin t$, 则 $dx=a\cos t\,dt$

$\int_0^a\frac{x^2(a-x)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t(1-\sin t)\,dt=a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt-a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,dt=a^3(t-\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+a^3(\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{(3\pi-8)a^3}{12}$

(12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta})d\theta=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$

$\Rightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta+\frac{\pi}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}d(\sin\theta+\cos\theta)+\frac{\pi}{2}=\ln|\sin\theta+\cos\theta|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta=\frac{\pi}{4}$

5.

(1) $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=-\int_{-a}^{0}f(-x)dx+\int_0^a f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(-x)d(-x)+\int_0^a f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=0$

(2) $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(-x)dx+\int_0^a f(x)dx=-\int_{-a}^{0}f(-x)d(-x)+\int_0^a f(x)dx=-\int_a^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

6. 设 $(k-1)p\le a<kp,\ k\in\mathbb{Z}$

则 $\int_a^{a+p}f(x)dx=\int_a^{kp}f(x)dx+\int_{kp}^{a+p}f(x)dx=\int_{a-(k-1)p}^{p}f(x)d(x-(k-1)p)+\int_0^{a-(k-1)p}f(x)dx(x-kp)=\int_{a-(k-1)p}^{p}f(x-(k-1)p)d(x-(k-1)p)+\int_0^{a-(k-1)p}f(x-kp)d(x-kp)=\int_{a-(k-1)p}^{p}f(x)dx+\int_0^{a-(k-1)p}f(x)dx$

$=\int_0^p f(x)dx$

7.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(\cos x)d(x+\frac{\pi}{2})=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$

(2) $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\int_{\pi}^{0}(\pi-x)f(\sin x)d(\pi-x)=-\pi\int_{\pi}^{0}f(\sin x)dx+\int_{\pi}^{0}xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)dx-\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx$

$\Rightarrow\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$

8.

(1) $I(m,n)=\int\cos^m x\sin^n x\,dx=\frac{1}{n+1}\int\cos^{m-1}x\,d\sin^{n+1}x=\frac{1}{n+1}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x-\frac{1}{n+1}\int\sin^{n+1}x\,d\cos^{m-1}x=\frac{1}{n+1}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x+\frac{m-1}{n+1}\int\cos^{m-2}x\sin^{n+2}x\,dx$

$\int\cos^{m-2}x\sin^{n+2}x\,dx=\int\cos^{m-2}x\sin^n x(1-\cos^2 x)dx=\int\cos^{m-2}x\sin^n x\,dx-\int\cos^m x\sin^n x\,dx=I(m-2,n)-I(m,n)$

代入得: $I(m,n)=\frac{1}{n+1}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x+\frac{m-1}{n+1}I(m-2,n)-\frac{m-1}{n+1}I(m,n)\Rightarrow I(m,n)=\frac{1}{m+n}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x+\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n)$

$\Rightarrow J(m,n)=I(m,n)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=(\frac{1}{m+n}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{m-1}{m+n}J(m-2,n)$

类似可证 $J(m,n)=\frac{n-1}{m+n}J(m,n-2)$

(2) $J(2m,2n)=\frac{(2m-1)!!(2n-1)!!}{(2m+2n)!!}J(0,0)=\frac{(2m-1)!!(2n-1)!!}{(2m+2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$

9. $g(x)=\int_x^{ax}f(t)dt=\int_x^b f(t)dt+\int_b^{ax}f(t)dt=-\int_b^x f(t)dt+\int_b^{ax}f(t)dt$

$\Rightarrow g'(x)=-f(x)+af(ax)$

$g(x)\equiv C\Rightarrow g'(x)=0\Rightarrow f(x)=af(ax)$

又 $x>0,a>0$, 则令 $a=\frac{1}{x}\Rightarrow f(x)=\frac{f(1)}{x}=\frac{c}{x}$

10. $\int_a^x(x-t)f'(t)dt=x\int_a^x f'(t)dt-\int_a^x tf'(t)dt$

$\Rightarrow\frac{d}{dx}\int_a^x(x-t)f'(t)dt=\int_a^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=f(x)-f(a)$

$\frac{d}{dx}\int_0^x(x-t)\sin t\,dt=(-\cos x)-(-\cos a)=\cos a-\cos x$

11. 即证 $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $\int_a^\xi f(x)dx-(\xi-a)f(a)=(b-\xi)f(b)-\int_\xi^b f(x)dx\Leftrightarrow\int_a^b f(x)dx=(\xi-a)f(a)+(b-\xi)f(b)$

令 $g(x)=1$, 则由积分第二中值定理得 $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^\xi g(x)dx+f(b)\int_\xi^b g(x)dx$

代入即证

12. 由积分第二中值定理得 $\exists\xi\in(0,2\pi)$ s.t. $\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=f(0)\int_0^\xi\sin nx\,dx+f(2\pi)\int_\xi^{2\pi}\sin nx\,dx=(f(0)-f(2\pi))\cdot\frac{1-\cos n\xi}{n}\ge 0$

13. 令 $u=t^2$, 则 $dt=\frac{1}{2\sqrt{u}}du$

$\int_x^{x+c}\sin t^2dt=\frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+c)^2}\sin u\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}du$

由积分第二中值定理得 $\exists\xi\in(x^2,(x+c)^2)$ s.t. $\int_{x^2}^{(x+c)^2}\sin u\frac{1}{\sqrt{u}}du=\frac{1}{x}\int_{x^2}^{\xi}\sin u\,du=\frac{\cos x^2-\cos\xi}{x}$

$\Rightarrow\left|\int_x^{x+c}\sin t^2dt\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{\cos x^2-\cos\xi}{x}\right|\le\frac{1}{2x}\cdot(|\cos x^2|+|\cos\xi|)\le\frac{1}{2x}\cdot 2=\frac{1}{x}$

14. 略

15. 令 $g'(x)=\begin{cases} f'(x), & f'(x)\geq 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$, $h'(x)=\begin{cases} f'(x), & f'(x)\leq 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

又令 $g(x)=\int_a^x g'(x)\,dx$, $h(x)=\int_a^x h'(x)\,dx+f(a)$, 显然有 $g(x)$ 在 $[a,b]\nearrow$, $h(x)$ 在 $[a,b]\searrow$

且 $g(x)+h(x)=\int_a^x f'(x)\,dx=f(x)$

16. 略

第九章总练习题

1. 证明：若 φ 在 $[0,a]$ 上连续，f 二阶可导，且 $f''(x)\geqslant 0$，则有

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))\,dt \geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\,dt\right).$$

2. 证明下列命题：

(1) 若 f 在 $[a,b]$ 上连续增，

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt, & x\in(a,b],\\ f(a), & x=a,\end{cases}$$

则 F 为 $[a,b]$ 上的增函数.

(2) 若 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)>0$，则

$$\varphi(x)=\int_0^x tf(t)\,dt\Big/\int_0^x f(t)\,dt$$

为 $(0,+\infty)$ 上的严格增函数. 如果要使 φ 在 $[0,+\infty)$ 上为严格增，试问应补充定义 $\varphi(0)=$?

3. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=A.$$

4. 设 f 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个连续周期函数，周期为 p，证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\,dt.$$

5. 证明：连续的奇函数的一切原函数皆为偶函数；连续的偶函数的原函数中只有一个是奇函数.

6. 证明施瓦茨(Schwarz)不等式：若 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx.$$

7. 利用施瓦茨不等式证明：

(1) 若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx;$$

(2) 若 f 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)\geqslant m>0$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\,dx\geqslant(b-a)^2;$$

(3) 若 f,g 都在 $[a,b]$ 上可积，则有闵可夫斯基(Minkowski)不等式：

$$\left[\int_a^b(f(x)+g(x))^2dx\right]^{\frac12}\leqslant\left[\int_a^b f^2(x)\,dx\right]^{\frac12}+\left[\int_a^b g^2(x)\,dx\right]^{\frac12}.$$

8. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，则

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right)\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\,dx.$$

9. 设 f 为 $(0,+\infty)$ 上的连续减函数，$f(x)>0$；又设

$$a_n=\sum_{k=1}^n f(k)-\int_1^n f(x)\,dx.$$

证明 $\{a_n\}$ 为收敛数列.

10. 若 f 在 $[0,a]$ 上连续可微，且 $f(0)=0$，则

$$\int_0^a|f(x)f'(x)|\,dx\leqslant\frac{a}{2}\int_0^a[f'(x)]^2dx.$$

*11. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上可积，且处处有 $f(x)>0$，则 $\int_a^b f(x)\,dx>0$.

（提示：由可积的第一充要条件进行反证；也可利用习题 9.6 第 7 题的结论.）

1. $f''(x)\geq 0 \Rightarrow$ 由Jenson不等式得 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(\varphi(x_i))\geq f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)) \Rightarrow \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}f(\varphi(x_i))\cdot\frac{a}{n}\geq f(\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}f(\varphi(x_i))\cdot\frac{a}{n})$

两边取极限 $n\to+\infty$ 得 $\frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))\,dt\geq f(\frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))\,dt)$

2.

(1) 由积分第一中值定理得 $\forall x>a$, $\exists \xi\in(a,x)$ s.t. $\int_a^x f(t)\,dt=f(\xi)(x-a)$

$F'(x)=\frac{f(x)}{x-a}-\frac{\int_a^x f(t)\,dt}{(x-a)^2}=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-a}>0$

$\Rightarrow F(x)$ 在 $[a,b]$ $\nearrow$

(2) $\varphi'(x)=\frac{(xf(x))(\int_0^x f(t)\,dt)-(\int_0^x tf(t)\,dt)f(x)}{(\int_0^x f(t)\,dt)^2}=\frac{f(x)\int_0^x(x-t)f(t)\,dt}{(\int_0^x f(t)\,dt)^2}>0$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 严格 $\nearrow$

又 $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{xf(x)}{f(x)}=0$

故补充定义 $\varphi(0)=0$ 即可

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

4. 令 $x=p\lambda$, $\lambda\to+\infty$, $y=\frac{t}{\lambda}$, 则 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\frac{1}{p\lambda}\int_0^{p\lambda}f(t)\,dt=\frac{1}{p}\int_0^p f(y\lambda)\,dt=\frac{1}{p}\int_0^p f(\lambda t)\,dt$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(t+np)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}f(\lambda t)$

$\Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_0^p f(\lambda t)=\int_0^p f(t)\,dt$

5.

(1) 设 $f(-x)=-f(x)$, 则 $\Phi(-x)=\Phi(x)$

又 $F(x)=\Phi(x)+C \Rightarrow F(-x)=F(x)$

(2) 设 $g(-x)=g(x)$, 则 $\Phi(-x)=-\Phi(x)$

又 $F(x)=\Phi(x)+C \Rightarrow$ 当且仅当 $C=0$ 时 $F(-x)=-F(x)$

6. 令 $F(x)=(tf(x)-g(x))^2$, 则 $F(x)\geq0$

$\int_a^b F(x)\,dx=\int_a^b(tf(x)-g(x))^2=(\int_a^b(f(x))^2dx)t^2-(2\int_a^b f(x)g(x)\,dx)t+(\int_a^b(g(x))^2dx)$

$\int_a^b F(x)\,dx\geq0 \Rightarrow \Delta=(2\int_a^b f(x)g(x)\,dx)^2-4(\int_a^b(f(x))^2dx)(\int_a^b(g(x))^2dx)\geq0$, 变形即证

7.

(1) 令 $g(x)=1$, 代入 Cauchy-Schwarz 不等式即证

(2) 令 $g(x)=(f(x))^{\frac12}$, $h(x)=(f(x))^{-\frac12}$, 代入 Cauchy-Schwarz 不等式即证

(3) 原式 $\Leftrightarrow \int_a^b(f(x)+g(x))^2dx\leq\int_a^b(f(x))^2dx+\int_a^b(g(x))^2dx+2(\int_a^b(f(x))^2dx\int_a^b(g(x))^2dx)^{\frac12}\Leftrightarrow\int_a^b f(x)g(x)\,dx\leq(\int_a^b(f(x))^2dx\int_a^b(g(x))^2dx)^{\frac12}$, 由 Cauchy-Schwarz 不等式即证

8. 由Jenson不等式即证

9. $a_n=\sum_{i=1}^{n}f(i)-\int_1^n f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}f(i)-\sum_{i=1}^{n-1}\int_i^{i+1}f(x)\,dx\geqslant\sum_{i=1}^{n}f(i)-\sum_{i=1}^{n-1}f(i)=f(n)>0$

$a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\,dx\leqslant f(n+1)-\int_n^{n+1}f(n+1)\,dx=0\Rightarrow a_n\searrow$

由单调有界定理得 $\{a_n\}$ 收敛

10. 令 $g(x)=\int_0^x|f'(t)|\,dt$，则 $g'(x)=|f'(x)|$

又 $f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt\Rightarrow|f(x)|\leqslant g(x)$

$\Rightarrow\int_0^a|f(x)f'(x)|\,dx\leqslant\frac{1}{2}g^2(a)\leqslant\frac{a}{2}\int_0^a(f'(x))^2\,dx$

11. 略

习 题 10.1

1. 求由抛物线 $y=x^2$ 与 $y=2-x^2$ 所围图形的面积.

2. 求由曲线 $y=|\ln x|$ 与直线 $x=\frac{1}{10}$, $x=10$, $y=0$ 所围图形的面积.

3. 抛物线 $y^2=2x$ 把圆 $x^2+y^2\leqslant 8$ 分成两部分，求这两部分面积之比.

4. 求内摆线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t\ (a>0)$ 所围图形的面积（图 10-8）.

5. 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 所围图形的面积.

6. 求三叶形曲线 $r=a\sin 3\theta\ (a>0)$ 所围图形的面积.

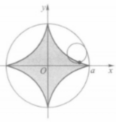


图 10-8

7. 求由曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1\ (a,b>0)$ 与坐标轴所围图形的面积.

8. 求由曲线 $x=t-t^3$, $y=1-t^4$ 所围图形的面积.

9. 求二曲线 $r=\sin\theta$ 与 $r=\sqrt{3}\cos\theta$ 所围公共部分的面积.

10. 求两椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 与 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\ (a>0,b>0)$ 所围公共部分的面积.

*11. 证明：对于由上、下两条连续曲线 $y=f_2(x)$ 与 $y=f_1(x)$ 以及两条直线 $x=a$ 与 $x=b\ (a<b)$ 所围的平面图形 A（图 10-1），存在包含 A 的多边形 $\{U_n\}$ 以及被 A 包含的多边形 $\{W_n\}$，使得当 $n\to\infty$ 时，它们的面积的极限存在且相等.

1. $A=\int_{-1}^{1}((2-x^2)-x^2)\,dx=\frac{8}{3}$

2. $A=\int_{\frac{1}{10}}^{10}|\ln x|\,dx=-\int_{\frac{1}{10}}^{1}\ln x\,dx+\int_{1}^{10}\ln x\,dx=\frac{99}{10}\ln 10-\frac{81}{10}$

3. $A_1=2\left(\int_0^2\sqrt{2x}\,dx+\int_2^{2\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}\,dx\right)=2\pi+\frac{4}{3}$

$A_2=\pi r^2-S_1=6\pi-\frac{4}{3}$

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$

4. 令 $\alpha=0$，$\beta=\frac{\pi}{2}$，则 $x(\alpha)=a$，$x(\beta)=0$

$A_1=\int_\alpha^\beta|y(t)x'(t)|\,dt=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\,dt=\frac{3}{32}a^2\pi$

$A=4A_1=\frac{3}{8}a^2\pi$

5. $A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a(1+\cos\theta))^2\,d\theta=\frac{3}{2}a^2\pi$

6. $A=6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(a\sin 3\theta)^2\,d\theta=\frac{1}{4}a^2\pi$

7. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1\Rightarrow y=b\left(\frac{1}{a}x-\frac{2}{\sqrt{a}}\cdot x^{\frac{1}{2}}+1\right)$

$A=\int_0^a y\,dx=\frac{1}{6}ab$

8. $\begin{cases}x(\alpha)=x(\beta)\\ y(\alpha)=y(\beta)\end{cases}\Rightarrow\alpha=-1,\ \beta=1$

$A=\int_\alpha^\beta|y(t)x'(t)|\,dt=\int_{-1}^{1}(3t^6-t^4-3t^2+1)\,dt=\frac{16}{35}$

9. $A=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\theta\,d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{3}\cos\theta)^2\,d\theta=\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{24}$

10. $A=4ab\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

11. 略

习 题 10.2

1. 如图 10-15 所示，直椭圆柱体被通过底面短轴的斜平面所截，试求截得楔形体的体积.

2. 求下列平面曲线绕轴旋转所围成立体的体积：

(1) $y=\sin x, 0\leqslant x\leqslant \pi$，绕 x 轴；

(2) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\ (a>0), 0\leqslant t\leqslant 2\pi$，绕 x 轴；

(3) $r=a(1+\cos\theta)\ (a>0)$，绕极轴；

(4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，绕 y 轴.

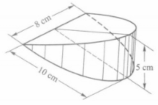


图 10-15

3. 已知球半径为 r，验证高为 h 的球缺体积 $V=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)\ (h\leqslant r)$.

4. 求曲线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 所围平面图形（图 10-8）绕 x 轴旋转所得立体的体积.

5. 导出曲边梯形 $0\leqslant y\leqslant f(x), a\leqslant x\leqslant b$ 绕 y 轴旋转所得立体的体积公式为

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx.$$

6. 求 $0\leqslant y\leqslant \sin x, 0\leqslant x\leqslant \pi$ 所示平面图形绕 y 轴旋转所得立体的体积.

1. $A(x)=2\cdot 4\sqrt{1-\frac{x^2}{100}}\cdot 5\cdot\frac{x}{10}=\frac{2}{5}x\sqrt{100-x^2}$

$V=\int_0^{10}A(x)\,dx=\frac{400}{3}$

2.

(1) $V=\pi\int_0^{\pi}(f(x))^2\,dx=\frac{\pi^2}{2}$

(2) $V=\pi\int_0^{2\pi}(y(t))^2\,dx(t)=5a^3\pi^2$

(3) $x(\theta)=r(\theta)\cos\theta=a(1+\cos\theta)\cos\theta,\ y(\theta)=r(\theta)\sin\theta=a(1+\cos\theta)\sin\theta$

$V=\left|\pi\int_0^{\frac{2\pi}{3}}y^2(\theta)\,dx(\theta)\right|-\left|\pi\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}y^2(\theta)\,dx(\theta)\right|=\frac{8}{3}\pi a^2$

(4) $x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$

$V=\pi\int_{-b}^{b}x^2\,dy=\frac{4}{3}a^2b\pi$

3. $A(x)=\pi(r^2-x^2)$

$V=\int_{-r}^{h-r}A(x)\,dx=\pi h^2(r-\frac{h}{3})$

4. $V=\left|\pi\int_0^{\pi}(y(t))^2\,d(x(t))\right|=\frac{32}{105}a^2\pi$

5. $A(x)=2\pi x\cdot f(x),\ x\in[a,b]$

$V=\int_a^b A(x)\,dx=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$

6. $V=\left|2\pi\int_0^{\pi}x\sin x\,dx\right|=2\pi^2$

习 题 10.3

1. 求下列曲线的弧长:

(1) $y=x^{3/2}, 0\leqslant x\leqslant 4$;

(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$;

(3) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t\,(a>0), 0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

(4) $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)\,(a>0), 0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

(5) $r=a\sin^3\dfrac{\theta}{3}\,(a>0), 0\leqslant\theta\leqslant 3\pi$;

(6) $r=a\theta\,(a>0), 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

*2. 求下列各曲线在指定点处的曲率:

(1) $xy=4$,在点 $(2,2)$;

(2) $y=\ln x$,在点 $(1,0)$;

(3) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\,(a>0)$,在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 的点;

(4) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t\,(a>0)$,在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点.

3. 求 a,b 的值,使椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t$ 的周长等于正弦曲线 $y=\sin x$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上一段的长.

*4. 本题的目的是证明性质 1.这可按以下顺序逐一证明:

(1) 记 $W=\{s_T \mid T$ 是 $\widehat{AB}$ 的一个分割$\}$,则 W 是一个有界集.

(2) 设 $\widehat{AB}$ 的弧长为 s,则 $s=\sup W$.

(3) 记 $W'=\{s_{T'} \mid T'$ 是 $\widehat{AD}$ 的一个分割$\}$ 及 $W''=\{s_{T''} \mid T''$ 是 $\widehat{DB}$ 的一个分割$\}$,则 W' 和 W'' 都是有界集,并且如果记 $s'=\sup W'$ 及 $s''=\sup W''$,则

$$s=s'+s''.$$

(4) 证明:$\widehat{AD}$ 的弧长为 s',$\widehat{DB}$ 的弧长为 s''.

*5. 设曲线由极坐标方程 $r=r(\theta)$ 给出,且二阶可导,证明它在点 (r,θ) 处的曲率为

$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}.$$

*6. 用上题公式,求心形线 $r=a(1+\cos\theta)\,(a>0)$ 在 $\theta=0$ 处的曲率、曲率半径和曲率圆.

*7. 证明抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 在顶点处的曲率为最大.

*8. 求曲线 $y=e^x$ 上曲率最大的点.

1.

(1) $s=\int_0^4\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\frac{8}{27}(10^{\frac{3}{2}}-1)$

(2) $y=(1-\sqrt{x})^2$

$s=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2}+1)$

(3) $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt=6a$

(4) $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt=2a\pi^2$

(5) $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta=\frac{3}{2}a\pi$

(6) $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta=a\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln|2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}|$

2.

(1) $y=\frac{4}{x}$

$K|_{x=2}=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

(2) $K|_{x=1}=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

(3) $K|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{|x'y''-x''y'|}{((x')^2+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4a}$

(4) $K|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{|x'y''-x''y'|}{((x')^2+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{3}a$

3. $s_1=\int_0^{2\pi}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 t}\,dt$

$s_2=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 t}\,dt$

$s_1=s_2\Rightarrow a^2=1,\ b^2-a^2=1\Rightarrow a=1,\ b=\sqrt{2}$

或 $a=\sqrt{2},\ b=1$

4. 略

5. $x(\theta)=r(\theta)\cos\theta,\ y(\theta)=r(\theta)\sin\theta$,代入即证

6. $K|_{\theta=0}=\frac{|r^2+2(r')^2-rr''|}{(r^2+(r')^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{4a}$

$R=\frac{1}{K}=\frac{4}{3}a$

$\odot$: $(x-\frac{2}{3}a)^2+y^2=\frac{16}{9}a^2$

7. $K=\frac{|x'y''-x''y'|}{((x')^2+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2|a|}{(4a^2x^2+4abx+b^2+1)^{\frac{3}{2}}}$,在 $x=-\frac{b}{2a}$ 处取得最大值

8. $K=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$

$K'=\frac{e^x(1-2e^{2x})}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$

习 题 11.1

1. 讨论下列无穷积分是否收敛? 若收敛,则求其值:

(1) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$; (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$;

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}dx$; (4) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}$;

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$; (6) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$;

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x \sin x dx$; (8) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. 讨论下列瑕积分是否收敛? 若收敛,则求其值:

(1) $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$; (2) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$;

(3) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$; (4) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(5) $\int_0^1 \ln x dx$; (6) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$;

(7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$; (8) $\int_0^1 \frac{dx}{x(\ln x)^p}$.

---

3. 举例说明:瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛时, $\int_a^b f^2(x)dx$ 不一定收敛.

4. 举例说明: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛且 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续时,不一定有 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

5. 证明:若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,且存在极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$,则 $A=0$.

6. 证明:若 f 在 $[a,+\infty)$ 上可导,且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 都收敛,则 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

1.

(1) $\int_0^u xe^{-x^2}dx = \frac{1-e^{-u^2}}{2}$

$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u xe^{-x^2}dx = \lim_{u\to+\infty}\frac{1-e^{-u^2}}{2} = \frac{1}{2}$

(2) $\int_0^u xe^{-x^2}dx = \frac{1-e^{-u^2}}{2}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{u\to-\infty}\int_u^0 xe^{-x^2}dx + \lim_{u\to+\infty}\int_0^u xe^{-x^2}dx = \lim_{u\to-\infty}\frac{e^{-u^2}-1}{2} + \lim_{u\to+\infty}\frac{1-e^{-u^2}}{2} = 0$

(3) $\int_0^u \frac{1}{\sqrt{e^x}}dx = 2-2e^{-\frac{1}{2}u}$

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}dx = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u \frac{1}{\sqrt{e^x}}dx = \lim_{u\to+\infty}(2-2e^{-\frac{1}{2}u}) = 2$

(4) $\int_1^u \frac{1}{x^2(1+x)}dx = \int_1^u \frac{1}{x^2}dx - \int_1^u \frac{1}{x}dx + \int_1^u \frac{1}{x+1}dx = (\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x})\Big|_1^u = \ln\frac{u+1}{2u} - \frac{1}{u} + 1$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x)}dx = \lim_{u\to+\infty}(\ln\frac{u+1}{2u} - \frac{1}{u} + 1) = 1-\ln 2$

(5) $\int_0^u \frac{1}{4x^2+4x+5}dx = \int_0^u \frac{1}{(2x+1)^2+4}dx$

令 $2x+1=2\tan t$,则 $x=\tan t-\frac{1}{2}$, $dx=\sec^2 t\,dt$

$\int_0^u \frac{1}{(2x+1)^2+4}dx = \int_0^{\arctan(u+\frac{1}{2})} \frac{1}{(2\tan t)^2+4}\cdot\sec^2 t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\arctan(u+\frac{1}{2})} 1\,dt = \frac{1}{4}\arctan(u+\frac{1}{2})$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^2+4}dx = -\lim_{u\to-\infty}\frac{1}{4}\arctan(u+\frac{1}{2}) + \lim_{u\to+\infty}\frac{1}{4}\arctan(u+\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4}$

(6) $\int_0^u e^{-x}\sin x dx = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-u}(\sin u+\cos u)$

$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx = \lim_{u\to+\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-u}(\sin u+\cos u)) = \frac{1}{2}$

(7) $\int_0^u e^x\sin x dx = \frac{1}{2}e^u(\sin u-\cos u)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\sin x dx = -\lim_{u\to-\infty}\frac{1}{2}e^u(\sin u-\cos u) + \lim_{u\to+\infty}\frac{1}{2}e^u(\sin u-\cos u) = \lim_{u\to+\infty}\frac{1}{2}e^u(\sin u-\cos u)$

$\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{2}e^u(\sin u-\cos u)$ 不存在 $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^x\sin x dx$ 发散

(8) 令 $x=\tan t$,则 $t=\arctan x$, $dx=\sec^2 t\,dt$

$\int_0^u \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^{\arctan u}\sec t\,dt = \frac{1}{2}\ln(u^2+1)$

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \lim_{u\to+\infty}\ln\left|\sqrt{u^2+1}+u\right|$

$\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{2}\left|\sqrt{u^2+1}+u\right|$ 不存在 $\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ 发散

2.

(1) $\int_u^b \frac{1}{(x-a)^p}dx = \begin{cases} \ln\frac{b-a}{u-a}, & p=1 \\ \frac{1}{1-p}((b-a)^{1-p}-(u-a)^{1-p}), & p\neq 1 \end{cases}$

$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx = \lim_{u\to a^+}\int_u^b \frac{1}{(x-a)^p} = \begin{cases} \text{不存在}, & p\geq 1 \\ \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & p<1 \end{cases}$

故当 $p\geq 1$ 时 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$ 发散;当 $p<1$ 时 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$ 收敛

(2) $\int_0^u \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(\int_0^u \frac{1}{1-x}dx + \int_0^u \frac{1}{1+x}dx) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|$

$\lim_{u\to1^-}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| = +\infty \Rightarrow \int_0^u \frac{1}{1-x^2}dx$ 发散

(3) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}dx = \lim_{u\to1^-}\int_0^u \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \lim_{u\to1^-}(2-2\sqrt{1-u}) = 2$

$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}dx = \lim_{u\to1^+}\int_u^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{u\to1^+}(2-2\sqrt{u-1}) = 2$

$\Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}dx = 4$

(4) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{u\to1^-}\int_0^u \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{u\to1^-}(1-\sqrt{1-u^2}) = 1$

(5) $\int_0^1 \ln x\,dx = \lim\limits_{u\to0^+}\int_u^1 \ln x\,dx = \lim\limits_{u\to0^+}(u-u\ln u-1) = -1$

(6) $\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx = \lim\limits_{u\to1^-}\int_0^u\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx = \lim\limits_{u\to1^-}\left(\arctan\sqrt{\frac{u}{1-u}}-\sqrt{u(1-u)}\right) = \frac{\pi}{2}$

(7) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac12}\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx + \int_{\frac12}^1\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx = \lim\limits_{u\to0^+}\int_u^{\frac12}\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx + \lim\limits_{u\to1^-}\int_{\frac12}^u\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx = \lim\limits_{u\to0^+}(-\arcsin(2u-1)) + \lim\limits_{u\to1^-}\arcsin(2u-1) = \pi$

(8) $\int_0^1\frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx = \int_0^{\frac12}\frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx + \int_{\frac12}^1\frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx = \lim\limits_{u\to0^+}\int_u^{\frac12}\frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx + \lim\limits_{u\to1^-}\int_{\frac12}^u\frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx = \begin{cases}-\infty, & p=-1\\ +\infty, & p\neq-1\end{cases}$

$\Rightarrow \int_0^1\frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$ 发散

3. $\int_0^1 x^{-\frac12}\,dx = \lim\limits_{u\to0^+}\int_u^1 x^{-\frac12}\,dx = 2$

$\int_0^1 x^{-1}\,dx = \lim\limits_{u\to0^+}\int_u^1 x^{-1}\,dx = +\infty$

4. $f(x) = \sin x^2 \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在

5. 假设 $A\neq0$，后利用保号性易证

6. 设 $\int_0^{+\infty} f'(x)\,dx = J$

$\int_a^{+\infty} f'(x)\,dx = \lim\limits_{u\to+\infty}(f(u)-f(a)) \Rightarrow \lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = f(a)+J$

$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$