Chapter I

Theorem 1.1（确界原理）

设S为非空数集．若S有上(下)界，则S必有上(下)确界．

证 I) $\exists x_0\in S$ s.t. $\forall x\in S$, $x_0\geq x$

则 $\forall \varepsilon>0$, $\exists x_0\in S$ s.t. $x_0>x_0-\varepsilon$

$\Rightarrow \sup S=x_0$

II) $\forall x\in S$, $\exists x_0\in S$ s.t. $x_0>x$

记 $B=\{m\mid \forall x\in S, m\geq x\}$, $A=\mathbb{R}\setminus B$

则 $A\notin\varnothing$, $B\notin\varnothing$, $\forall a\in A, b\in B$, $a<b \Rightarrow (A|B)$是$\mathbb{R}$的一个Dedekind分割

$\Rightarrow \exists M\in B$ s.t. $\forall b\in B$, $M\leq B \Rightarrow M=\min B$

$M\in B\Rightarrow \forall x\in S$, $M\geq x$

假设 $\exists \varepsilon>0$ s.t. $\forall x\in S$. $x\leq M-\varepsilon$

则 $M-\varepsilon\in B$, 与 $M=\min B$ 矛盾!

故 $\forall\varepsilon>0$, $\exists x\in S$, $x>M-\varepsilon$

综上, $M=\sup S$

综上, S存在上确界

Example 1.1

设 $a>0$, $n\in N^+$, $n\geq 2$. 证明：方程 $x^n=a$ 有唯一的正数解.

证 先证存在性：

I) $a=1$

令 $x=1$

II) $a\in(0,1)$

记 $E=\{x\mid x>0, x^n<a\}$, 显然1是E的一个上界

由确界原理, E存在上确界, 记 $c=\sup E$

显然 $a\in E$, 则有 $a\leq c\leq 1$

i) 若 $c^n>a$

设 $m=\frac{nc^{n-1}}{c-a}>1$, 则 $\frac{1}{m}<c$

则 $\exists x_0\in E$ s.t. $x_0>c-\frac{1}{m} \Rightarrow x_0^n>(c-\frac{1}{m})^n>c^n-\frac{n}{m}c^{n-1}=c^n-(c^n-a)=a$, 与 $x_0\in E$ 矛盾!

ii) 若 $c^n<a$

类似(i)可推出矛盾!

综上, $c^n=a$

综上, $x^n=c$ 存在正数解

再证唯一性：

设 $b\neq c$

则 $b^n-a=b^n-c^n=(b-c)(b^{n-1}+b^{n-2}c+\cdots+c^{n-1})\neq 0\Rightarrow b^n\neq a$

即证

Theorem 1.2

设$f(x)$, $x\in D$ 为严格增(减)函数，则f必有反函数f^{-1}，且f^{-1}在其定义域$f(D)$上也是严格增(减)函数.

证 设 $y_0=f(x_0)$. 则 $\forall x>x_0$, $f(x)>f(x_0)$; $\forall x<x_0$, $f(x)<f(x_0)$

故 $\forall y \in f(D)$，$\exists$ 唯一的 x s.t. $f(x)=y \Rightarrow f^{-1}$ 存在

又 $\forall y_1, y_2 \in f(D)$，设 $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$

不妨设 $y_1<y_2$，则 $x_1<x_2$，否则与 f 严格增矛盾！

故 $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$，即 f^{-1} 严格增

Example 1.2

设 f, g 为 D 上的有界函数．证明：$\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\} \leq \inf\limits_{x\in D} f(x) + \sup\limits_{x\in D} g(x)$

证 $\forall x \in D$，$f(x)+g(x) \geq \inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$，$g(x) \leq \sup\limits_{x\in D} g(x) \Rightarrow -g(x) \geq -\sup\limits_{x\in D} g(x)$

则 $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\} - \sup\limits_{x\in D} g(x) \leq (f(x)+g(x))+(-g(x))=f(x)$

故 $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\} - \sup\limits_{x\in D} g(x)$ 是 $f(x)$ 的一个下界

$\Rightarrow \inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\} - \sup\limits_{x\in D} g(x) \leq \inf\limits_{x\in D} f(x)$，移项即证

Corollary 1.1

$\max\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$，$\min\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$

证 不妨设 $a\leq b$

则 $\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)=\frac{1}{2}(a+b+b-a)=b=\max\{a,b\}$

$\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)=\frac{1}{2}(a+b-b+a)=a=\max\{a,b\}$

Chapter Ⅱ

Definition 2.1 (数列极限)

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0$ s.t. $\forall n>N, |a_n-a|<\varepsilon$

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists N>0$ s.t. $\forall n>N, a_n>M$

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists N>0$ s.t. $\forall n>N, a_n<-M$

Example 2.1

证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n^2}{n^2-3}=3$

证 当 $n>\sqrt{\frac{9}{\varepsilon}+3}$ 时, $\left|\frac{3n^2}{n^2-3}-3\right|=\left|\frac{9}{n^2-3}\right|<\left|\frac{9}{\frac{9}{\varepsilon}+3-3}\right|=\varepsilon$

故 $\forall\varepsilon>0, \exists N=\sqrt{\frac{9}{\varepsilon}+3}, \forall n>N, |a_n-3|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n^2}{n^2-3}=3$

Example 2.2

证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$, $|q|<1$

证 当 $q=0$ 时显然成立

当 $q\neq0$ 时, 记 $h=\frac{1}{q}-1 \Rightarrow q=\frac{1}{1+h}$

则 $q^n=\frac{1}{(1+h)^n}$, 又 $(1+h)^n\geq 1+hn$, 故 $q^n\leq\frac{1}{1+hn}<\frac{1}{hn}$

$\forall\varepsilon>0, \exists N=\frac{q}{(1-q)\varepsilon}$ s.t. $\forall n>N, q^n<\frac{1}{hn}<\frac{q}{1-q}\cdot\frac{(1-q)\varepsilon}{q}=\varepsilon$

Definition 2.2 (数列极限的等价表示)

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \{x\in\{a_n\} \mid x\notin U(a;\varepsilon)\}$ 为有限集

Corollary 2.1

$\exists\varepsilon>0, \{x\in\{a_n\} \mid x\notin U(a;\varepsilon)\}$ 为无限集 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n\neq a$

Theorem 2.1 (保号性)

若 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a>0\ (<0)$, 则 $\forall a'\in(0,a)\ (a'\in(a,0))$, $\exists N>0$ s.t. $\forall n>N, a_n>a'\ (a_n<a')$

证 令 $\varepsilon=a-a'$, 代入定义即证

注 应用此性质时常令 $a'=\frac{a}{2}$

Theorem 2.2 (保不等式性)

设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 为收敛数列. 若 $\exists N_0>0$ s.t. $\forall n>N_0, a_n\leq b_n$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\leq\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

证 记 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=b$

则 $\forall\varepsilon>0, \exists N_1>0$ s.t. $\forall n>N_1, a_n>a-\varepsilon$

$\exists N_2>0$ s.t. $\forall n>N_2, b_n<b+\varepsilon$

故 $\forall\varepsilon>0, \exists N=\max\{N_0,N_1,N_2\}$ s.t. $\forall n>N, a-\varepsilon<a_n\leq b_n<b+\varepsilon$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0, a<b+2\varepsilon \Rightarrow a\leq b$

Theorem 2.3 (迫敛性)

设收敛数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都以 a 为极限, 数列 $\{c_n\}$ 满足: $\exists N_0>0, \forall n>N_0, a_n\leq c_n\leq b_n$, 则数列 $\{c_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=a$

证 $\forall\varepsilon>0, \exists N_1>0$ s.t. $\forall n>N_1, a_n>a-\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0, \exists N_2>0$ s.t. $\forall n>N_2, b_n<a+\varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N=\max\{N_1,N_2\}$ s.t. $\forall n>N, a-\varepsilon<a_n\le c_n\le b_n<a+\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} c_n=a$

Example 2.3

求数列$\{n^{\frac{1}{n}}\}$的极限.

解 设$n^{\frac{1}{n}}=1+h_n$，显然有$h_n>0$

则 $n=(1+h_n)^n>\underbrace{C_n^2 h_n^2}_{\text{二项式定理放缩}}=\frac{n(n+1)}{2}h_n^2 \Rightarrow h_n<\sqrt{\frac{2}{n+1}}$

$\Rightarrow n^{\frac{1}{n}}<1+\sqrt{\frac{2}{n+1}}\to 1 \quad (n\to+\infty)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}}=1$

Theorem 2.4

数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow$$\{a_n\}$的任何子列都收敛，且与$\{a_n\}$有相同的极限

证 $\Rightarrow$) 记$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$，设$\{a_n\}$的子列为$\{a_{n_k}\}$

$\forall \varepsilon>0, \exists N>0$ s.t. $\forall n>N, |a_n-a|<\varepsilon$

又$n_k\ge k$，故$\forall \varepsilon>0, \exists N'=N$ s.t. $\forall k>N', |a_{n_k}-a|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty}\{a_{n_k}\}=a$

$\Leftarrow$) $\{a_n\}$本身也是$\{a_n\}$的一个子列，故显然成立

Corollary 2.2

若数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n-1}=\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n}=A$，则$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=A$

证 $\forall \varepsilon>0, \exists N_1>0$ s.t. $\forall n>N_1, |a_{2n-1}-a|<\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0, \exists N_2>0$ s.t. $\forall n>N_2, |a_{2n}-a|<\varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N=\max\{2N_1,2N_2\}$ s.t. $\forall n>N, |a_n-a|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$

Theorem 2.5 (单调有界定理)

单调的有界数列必有极限.

证 不妨设$\{a_n\}$单增，由确界原理可知，$\{a_n\}$有上界$\Rightarrow$$\{a_n\}$有上确界，记$a=\sup\{a_n\}$

则$\forall \varepsilon>0, \exists k\in N^+$ s.t. $a_k>a-\varepsilon$

又$\{a_n\}$单增$\Rightarrow \forall k'>k, a_{k'}>a_k>a-\varepsilon$

故$\forall \varepsilon>0, \exists N=k$ s.t. $\forall n>N, |a_n-a|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$

Corollary 2.3

设S为有界数集，若$\sup S=a\notin S$ ($\inf S=b\ne S$)，则存在严格递增(严格递减)的数列$\{x_n\}\subseteq S$ s.t. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=b$).

证 $\forall \varepsilon>0, \exists x\in S$ s.t. $x>a-\varepsilon$

则令$\varepsilon_1=1$，$\exists x_1\in S$ s.t. $x_1>a-\varepsilon_1$

当$k\ge 2$时，令$\varepsilon_k=\min\{\frac{1}{k}, a-x_{k-1}\}$，$\exists x_k\in S$ s.t. $x_k>a-\varepsilon_k$

则$a_k>a-(a-a_{k-1})=a_{k-1}$

且利用$\{a-\frac{1}{n}\}$迫敛，可得$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$

Theorem 2.6

任何数列都有单调子列.

证 I) $\forall k\in N$，$\{a_{k+n}\}$均有最大项

则令$k_1=0$，取得$\{a_{k_1+n}\}$中的最大项a_{n_1}

当 $i\geq 2$ 时，令 $k_i=n_i$，取得 $\{a_{k_i+n}\}$ 中的最大项 a_{n_i}

不严格减

如上，可得单减数列 $\{a_{n_i}\}$

II) $\exists k\in N$ s.t. $\{a_{k+n}\}$ 无最大项

取 $a_{n_1}=a_{k+1}$

当 $i\geq 2$ 时，$\{a_{k+n}\}$ 无最大项 $\Rightarrow$ 总能取得 $n_i>n_{i-1}$ s.t. $a_{n_i}>a_{n_{i-1}}$

严格增

如上，可得单增数列 $\{a_{n_i}\}$

Theorem 2.7（致密性定理）

任何有界数列必定有收敛的子列.

证 结合 Theorem 2.5, Theorem 2.6 即证

Theorem 2.8（Cauchy 收敛准则）

数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N>0$ s.t. $\forall m,n>N, |a_m-a_n|<\varepsilon$

证 $\Rightarrow$) 记 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$

$\forall\varepsilon>0, \exists N'>0$ s.t. $\forall n>N', |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow a-\frac{\varepsilon}{2}<a_n<a+\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N=N'$ s.t. $\forall m,n>N, |a_m-a_n|<|(a+\frac{\varepsilon}{2})-(a-\frac{\varepsilon}{2})|=\varepsilon$

$\Leftarrow$) 令 $\varepsilon=1$，则 $\exists N_0$ s.t. $\forall n>N_0, |a_n-a_{N_0+1}|<\varepsilon=1$

记 $M=\max\{a_1,a_2,\dots,\dots,a_{N_0},a_{N_0}+1\}$，则 $\forall n, a_n\leq M \Rightarrow \{a_n\}$ 有界　　Step 1. 证 $\{a_n\}$ 有界

由致密性定理，可知 $\exists\{a_{k_n}\}$ 收敛，记 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{k_n}=a$　　Step 2. 利用致密性原理构造出收敛的 $\{a_{k_n}\}$

则 $\forall\varepsilon>0, \exists N_1>0$ s.t. $\forall n>N_1, |a_{k_n}-a|<\frac{\varepsilon}{2}$

又 $\forall\varepsilon>0, \exists N_2>0$ s.t. $\forall m,n>N_2, |a_m-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$，不妨设 $k_0\in\{k_n\}>\max\{k_{N_1},N_2\}$，则 $\forall n>N_2, |a_n-a|\leq|a_n-a_{k_0}|+|a_{k_0}-a|<\varepsilon$　　Step 3. 利用 Cauchy 条件通过 $\{a_{n_k}\}$ 控制 $\{a_n\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$

Corollary 2.4

若 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$，

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=a$

(2) 若 $a_i>0$，$i=1,\dots,n$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}=a$

证

(1) $\forall\varepsilon>0, \exists N_1>0$ s.t. $\forall n>N_1, |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$

故当 $n>N_1$ 时，$\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i-a\right|=\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-a)\right|\leq\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-a|<\frac{1}{n}\left[\sum\limits_{i=1}^{N_1}|a_i-a|+(n-N_1)\cdot\frac{\varepsilon}{2}\right]$

记 $S=\sum\limits_{i=1}^{N_1}|a_i-a|$，则 $\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i-a\right|<\frac{S}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{S}{n}+\frac{\varepsilon}{2}$

又 $\forall\varepsilon>0, \exists N_2$ s.t. $\forall n>N_2, \frac{S}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$

故 $\forall\varepsilon>0, \exists N=\max\{N_1,N_2\}$ s.t. $\forall n>N, \left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=a$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_n}}$，由 (1) 得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{\frac{1}{a}}=a$

又 $\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_n}}\leq\left(\prod\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}\leq\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$

由迫敛性即证

Chapter Ⅲ

Definition 3.1（函数极限）

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists M>0$ s.t. $\forall x>M, |f(x)-A|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ s.t. $\forall x$ 满足 $0<|x-x_0|<\delta$, $|f(x)-A|<\varepsilon$

Theorem 3.1（局部有界性）

即存在性

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 f 在 x_0 的某空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 上有界.

证　记 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

令 $\varepsilon=1$，则 $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0;\delta)$，$|f(x)-A|<1 \Rightarrow |f(x)|<|A|+1$

即证 f 在 $U^\circ(x_0;\delta)$ 上有界

Theorem 3.2（局部保号性）

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0\ (<0)$，则 $\forall r\in(0,A)\ (\in(A,0))$，$\exists U^\circ(x_0)$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0)$，$f(x)>r>0\ (f(x)<r<0)$

证　不妨设 $A>0$，$\forall r\in(0,A)$，令 $\varepsilon=A-r$

则 $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0;\delta)$，$|f(x)-A|<\varepsilon \Rightarrow f(x)>A-\varepsilon=r$

注　应用此性质时常令 $r=\frac{A}{2}$

Theorem 3.3（保不等式性）

即存在性

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 均存在，且在某邻域 $U^\circ(x_0;\delta_0)$ 上有 $f(x)\le g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

证　记 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$

则 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta_1>0$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0;\delta_1)$，$|f(x)-A|<\varepsilon \Rightarrow f(x)>A-\varepsilon$

$\exists\delta_2>0$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0;\delta_2)$，$|g(x)-B|<\varepsilon \Rightarrow g(x)<B+\varepsilon$

故 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\}$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0;\delta)$，$A-\varepsilon<f(x)\le g(x)<B+\varepsilon$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0, A<B+2\varepsilon \Rightarrow A\le B$

Theorem 3.4（迫敛性）

即存在性

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，且在某 $U^\circ(x_0;\delta_0)$ 上有 $f(x)\le h(x)\le g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$

证　$\forall\varepsilon>0, \exists\delta_1>0$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0;\delta_1)$，$|f(x)-A|<\varepsilon \Rightarrow f(x)>A-\varepsilon$

$\exists\delta_2>0$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0;\delta_2)$，$|g(x)-A|<\varepsilon \Rightarrow g(x)<A+\varepsilon$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\}$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0;\delta)$，$A-\varepsilon<f(x)\le h(x)\le g(x)<A+\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$

Theorem 3.5（Heine 定理）

设 f 在 $U^\circ(x_0;\delta)$ 上有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \forall\{x_n\}\subseteq U^\circ(x_0;\delta_0)$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ 存在且相等

证　$\Rightarrow$）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0;\delta)$，$|f(x)-A|<\varepsilon$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0 \Rightarrow \exists N>0$ s.t. $\forall n>N, x_n\in U^\circ(x_0;\delta) \Rightarrow |f(x_n)-A|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=A$

$\Leftarrow$）设 $\forall\{x_n\}\subseteq U^\circ(x_0;\delta_0)$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=A$

假设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$

则 $\exists\varepsilon_0>0$ s.t. $\forall\delta>0$，$\exists x\in U^\circ(x_0;\delta)$ s.t. $|f(x)-f(x_0)|>\varepsilon_0$

依次取 $\delta=\delta_0,\frac{\delta_0}{2},\frac{\delta_0}{3},\dots$，都存在 $x_1,x_2,x_3,\dots$ 满足上式

则显然 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0$，但 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)\neq f(x_0)$，与题设矛盾！

故 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

Theorem 3.6 (Cauchy 收敛准则)

设 f 在 $U^\circ(x_0;\delta_0)$ 上有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$ s.t. $\forall x_1,x_2\in U^\circ(x_0;\delta)$，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

证 $\Rightarrow$) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0;\delta)$，$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-A|+|A-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$\Leftarrow$) 设 $\{x_n\}\subseteq U^\circ(x_0,\delta_0)$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0$

则 $\exists N>0$ s.t. $\forall n>0$，$x_n\in U^\circ(x_0;\delta)$

$\Rightarrow \forall m,n>N$，不妨设 $m<n$，有 $|x_m-x_{m+1}|<\frac{\varepsilon}{n-m}$，$|x_{m+1}-x_{m+2}|<\frac{\varepsilon}{n-m}$，…，$|x_{n-1}-x_n|<\frac{\varepsilon}{n-m} \Rightarrow |x_m-x_n|\le|x_m-x_{m+1}|+\cdots+|x_{n-1}-x_n|<\varepsilon$

由数列的 Cauchy 收敛准则可知，$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=A$

再由 Heine 定理可知，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

Definition 3.2 (无穷小量阶)

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$，

- $A=0$：则 f 为 g 的高阶无穷小量，g 为 f 的低阶无穷小量，记作 $f(x)=o(g(x))\ (x\to x_0)$
- $A=1$：f 与 g 为 $x\to x_0$ 时的等价无穷小量，记作 $f(x)\sim g(x)\ (x\to x_0)$
- $A=c\neq0$：f 与 g 为 $x\to x_0$ 时的同阶无穷小量

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$，则 f 和 g 不能比较量阶

Definition 3.3 (有界量阶)

若当 $x\in U^\circ(x_0)$ 时，$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\le L$，则记作 $f(x)=O(g(x))\ (x\to x_0)$

Corollary 3.1 (常用等价无穷小)

当 $x\to0$ 时，

$\sin x\sim x$，$\cos x\sim 1-\frac{1}{2}x^2$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$

$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$，$\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3$，$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$，$\arcsin x-x\sim\frac{1}{6}x^3$，$x-\arctan x\sim\frac{1}{3}x^3$，$\arcsin x-\arctan x\sim\frac{1}{2}x^3$，$\cos^a x=1-\frac{a}{2}x^2$

$\ln(1+x)\sim x$，$\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}$

$e^x\sim1+x$，$a^x\sim1+x\ln a$

$(1+x)^a\sim1+ax$

Corollary 3.2

若 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty$，

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=+\infty$

(2) 若 $a_i>0$，$i=1,2,\dots,n$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}=+\infty$

证

(1) $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{N}a_i+\frac{1}{n}\sum\limits_{i=N+1}^{n}a_i$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{N}a_i=0$，由保号性可知 $\exists N_1>0$ s.t. $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{N_1}a_i>-1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}a_i=+\infty$，由保号性可知 $\forall M>0$，$\exists N_2>0$ s.t. $\forall n>N_2$，$a_n>2(M+1)$

$\Rightarrow \forall M>0$，$\exists N_3=\max\{N_1,N_2\}$ s.t. $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=N+1}^{n}a_i>\frac{n-N_3}{n}\cdot2(M-1)$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-N_3}{n}=1$，由保号性可知 $\exists N_4>0$ s.t. $\forall n>N_4$，$\frac{n-N_3}{n}>\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \forall M>0$，$\exists N=\max\{N_3,N_4\}$ s.t. $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{N}a_i+\frac{1}{n}\sum\limits_{i=N+1}^{n}a_i>(-1)+\frac{1}{2}\times2(M+1)=M$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=+\infty$

(2) $\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln a_i}$

又 $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \ln a_n = +\infty$

由(1)可知，$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln a_i = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln a_i} = +\infty$

Chapter IV

Definition 4.1（连续）

f在$x=x_0$处连续$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Corollary 4.1

f在$x=x_0$处连续$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$

证 由定义即证

注 这表明了连续函数具有极限运算$\lim$与函数f的可交换性

Theorem 4.1（复合函数的连续性）

若函数f在$x=x_0$处连续，g在$x=u_0$处连续，$u_0=f(x_0)$，则$g\circ f$在$x=x_0$处连续.

证 $\lim\limits_{x\to u_0} g(x)=g(u_0) \Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ s.t. $\forall x\in U(u_0;\delta), |g(x)-g(u_0)|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Rightarrow \forall \delta, \exists \delta'>0$ s.t. $\forall x\in U(x_0;\delta'), |f(x)-f(x_0)|<\delta$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta'>0$ s.t. $\forall x\in U(x_0;\delta') \Rightarrow f(x)\in U(f(x_0);\delta) \Rightarrow |g(f(x))-g(u_0)|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=g(f(x_0))$，即证

注 事实上，从以上证明我们不难发现，当$x=x_0$是内函数f的可去间断点时，以上结论仍然成立（即只需要保证外函数g在$u=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$处连续即可）

Theorem 4.2（有界性定理）

若函数f在闭区间$[a,b]$上连续，则f在闭区间$[a,b]$上有界.

证 假设f在$[a,b]$上无界

则$\exists \{x_n\}$满足$f(x_n)>n$，易见$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=+\infty$

又$\{x_n\}\subseteq[a,b]$，由致密性定理可知，$\{x_n\}$存在收敛子列$\{x_{k_n}\}$，记$\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n}=x_0\in[a,b]$

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{k_n})=+\infty$，由Heine定理可知，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$，与$f(x)$在$[a,b]$上连续矛盾！

故f在$[a,b]$上有界

Theorem 4.3（最大、最小值定理）

若函数f在闭区间$[a,b]$上连续，则$\forall x_1,x_2\in[a,b]$ s.t. $\forall x\in[a,b], f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$

证 由有界性定理与确界原理可知，f存在上确界，记$M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

假设$\forall x\in[a,b], f(x)<M$

则记$g(x)=\frac{1}{M-f(x)}$，显然$g(x)$在$[a,b]$上连续，则$g(x)$存在上界，记$G>g(x)|_{x\in[a,b]}>0$

$\Rightarrow \frac{1}{M-f(x)}<G \Rightarrow f(x)<M-\frac{1}{G}<M$，与$M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$矛盾！

故$\exists \xi\in[a,b]$ s.t. $f(\xi)=M$

Theorem 4.4（介值性定理）

设函数f在闭区间$[a,b]$上连续且$f(a)\neq f(b)$，则$\forall \mu\in(\min\{f(a),f(b)\},\max\{f(a),f(b)\})$，至少存在一点$x=x_0\in(a,b)$ s.t. $f(x_0)=\mu$

证 不妨设$f(a)<\mu<f(b)$，记$g(x)=f(x)-\mu$，则g在$[a,b]$上连续

记$E=\{x\,|\,g(x)<0\}$，显然$E\subseteq[a,b]$，由确界原理可知，$\exists x_0=\sup E$，又$g(a)<0, g(b)>0 \Rightarrow x_0\in(a,b) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

假设$g(x_0)\neq 0$

I) $g(x_0)<0$

由极限的保不等式性，$\exists \delta>0$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0,\delta), f(x)<\frac{1}{2}f(x_0)<0 \Rightarrow \exists x>x_0$ s.t. $f(x)<0$，与$x_0=\sup E$矛盾！

Ⅱ) $g(x_0)<0$

由极限的保不等式性，$\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in U^\circ(x_0,\delta)$, $f(x)>\frac{1}{2}f(x_0)>0 \Rightarrow \exists x<x_0$ s.t. $f(x)>0$, 与 $x_0=\sup E$ 矛盾!

综上，$g(x_0)=0\Rightarrow f(x_0)=\mu$，即证

Corollary 4.2（根的存在定理）

若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ s.t. $f(x)=0$

证 由介值性定理易证.

Definition 4.2（一致连续性）

f 在区间 I 上一致连续 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ s.t. $\forall x_1,x_2\in I$ 满足 $|x_1-x_2|<\delta$，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

注 一致连续性是比连续性更强的性质，一般来说，连续性下的 $\delta=\delta(\varepsilon,x)$，即 δ 会随 x 的改变而改变；但一致连续性下的 $\delta=\delta(\varepsilon)$，即 ε 的取值不依赖于 x. 因此一致连续性实际上是体现函数导数特点的一个性质.

Theorem 4.5

函数 f 在 I 上一致连续的充要条件为：$\forall\{x_n'\},\{x_n''\}\subseteq I$，若 $\lim\limits_{n\to+\infty}|x_n'-x_n''|=0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}|f(x_n')-f(x_n'')|=0$

证 $\Rightarrow$) 假设 f 在 I 上不一致连续 $\Rightarrow \exists\varepsilon_0>0$ s.t. $\forall\delta>0$，$\exists x',x''\in I$ s.t. $|x'-x''|<\delta$，$|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$

设 $\delta_0>0$，$\delta_i=\frac{1}{i}\delta_0$，则 $\forall\delta_i$，$\exists x_i',x_i''\in I$ s.t. $|x_i'-x_i''|<\delta_i$，$|f(x_i')-f(x_i'')|\geq\varepsilon_0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}|x_n'-x_n''|=0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}|f(x_n')-f(x_n'')|\neq0$，与题设矛盾!

$\Rightarrow f$ 在 I 上一致连续

$\Leftarrow$) $\lim\limits_{n\to+\infty}|x_n'-x_n''|=0\Rightarrow\forall\delta>0$，$\exists N>0$ s.t. $\forall n>N$，$|x_n'-x_n''|<\delta$

f 在 I 上一致连续 $\Rightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ s.t. $\forall x',x''\in I$，若 $|x'-x''|<\delta$，则 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$ s.t. $\forall n>N$，$|f(x_n')-f(x_n'')|<\varepsilon$

Theorem 4.6（一致连续性定理 / Cantor 定理）

若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续

证 假设 f 在 $[a,b]$ 上不一致连续

由 Theorem 4.5 知，$\exists\varepsilon_0>0$，$\{x_n\},\{y_n\}\subseteq[a,b]$ s.t. $\lim\limits_{n\to+\infty}|x_n-y_n|=0$ 且 $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon_0$

由致密性定理可知，$\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{k_n}\}$，记 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{k_n}=x_0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_{k_n}=x_0$

由 Heine 定理可知，$\lim\limits_{n\to+\infty}|f(x_{k_n})-f(y_{k_n})|=\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)-f(x)|=f(x_0)-f(x_0)=0$，与 $|f(x_{k_n})-f(y_{k_n})|\geq\varepsilon_0$ 矛盾!

故 f 在 $[a,b]$ 上一致连续

Corollary 4.3

设区间 I_1 的右端点 $c\in I_1$，区间 I_2 的左端点 $c\in I_2$，且函数 f 分别在 I_1 和 I_2 上一致连续，则 f 在 $I=I_1\cup I_2$ 上也一致连续

证 $\forall\varepsilon>0$，

$\exists\delta_1>0$ s.t. $\forall x_1,x_2\in I_1$ 满足 $|x_1-x_2|<\delta_1$，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

$\exists\delta_2>0$ s.t. $\forall x_1,x_2\in I_2$ 满足 $|x_1-x_2|<\delta_2$，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

$\exists\delta_3>0$ s.t. $\forall x\in I$ 满足 $|x-c|<\delta_3$，$|f(x)-f(c)|<\frac{\varepsilon}{2}$

则令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ 即证

注 常利用此推论将函数的定义域拆分为若干子区间，以通过分别证明函数在子区间上的一致连续性来证明其在全定义域上一致连续.

Theorem 4.7（Lipschitz 连续）

若函数 f 在区间 I 上满足 Lipschitz 条件，即 $\exists L>0$ s.t. $\forall x_1,x_2\in I$，$|f(x_1)-f(x_2)|\leq L|x_1-x_2|$，则 f 在 I 上一致连续.

证 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta=\frac{\varepsilon}{L}$ s.t. $\forall x_1, x_2 \in I$ 满足 $|x_1-x_2|<\delta$, $|f(x_1)-f(x_2)| \le L|x_1-x_2| < L\cdot\frac{\varepsilon}{L}=\varepsilon$，即证

Chapter V

Definition 5.1 (导数)

若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称 f 在 $x=x_0$ 处可导，且该极限即为 f 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$.

令 $x=x_0+\Delta x$, $y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，则 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

Definition 5.2 (有限增量公式)

若 f 在 $x=x_0$ 处可导，则 $\varepsilon=\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)$ 是当 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小量，则 $\varepsilon\cdot(\Delta x)=o(\Delta x)$，变形即得 f 在 $x=x_0$ 处的有限增量公式：

$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$

Theorem 5.1

若 f 在 $x=x_0$ 处可导，则 f 在 $x=x_0$ 处连续.

证 由有限增量公式易证.

Theorem 5.2 (费马定理)

若 $x=x_0$ 是 f 的极值点，则 $f'(x)=0$.

证 假设 $f'(x_0)\neq 0$，不妨 $f'_+(x_0)>0$，则 $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in U^\circ_+(x_0;\delta)$，$f(x_0)<f(x)$，与 $x=x_0$ 是 f 的极值点矛盾！

类似可讨论 $f'_+(x_0)<0$, $f'_-(x_0)>0$, $f'_-(x_0)<0$ 的情况.

综上即得，$f'(x_0)=0$

Theorem 5.3 (导数的四则运算)

(1) 若 $f(x)=u(x)\pm v(x)$，则 $f'(x)=u'(x)\pm v'(x)$

(2) 若 $f(x)=u(x)v(x)$，则 $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

(3) 若 $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$，则 $f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

证

(1) $f(x)=u(x)\pm v(x)\Rightarrow f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$

$=u'(x)\pm v'(x)$

(2) $f(x)=u(x)v(x)\Rightarrow f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)\right)+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\cdot u(x)\right)$

$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

(3) 记 $g(x)=\frac{1}{v(x)}\Rightarrow g'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{v(x+\Delta x)}-\frac{1}{v(x)}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}-\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{v(x+\Delta x)v(x)}$

$=-\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}$

则 $f(x)=u(x)g(x)\Rightarrow f'(x)=u'(x)g(x)+u(x)g'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

注 导数的乘法法则可利用数学归纳法推广到任意有限个函数乘积的情形，即 $\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\right)'=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\varphi_i'(x)\prod\limits_{j\neq i}\varphi_j(x)\right)$

Theorem 5.4 (反函数的导数)

若 $y=f(x)$ 和 $x=\varphi(y)$ 互为反函数，且 $y_0=f(x_0)$ $(x_0=\varphi(y_0))$，则 $f'(x_0)=\frac{1}{\varphi'(y_0)}$

证 记 $\Delta x=\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，易见当且仅当 $\Delta y\to 0$ 时 $\Delta x\to 0$，则

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y_0)}$$

Theorem 5.5

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导 $\Leftrightarrow$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上，存在一个在 $x=x_0$ 处连续的函数 $H(x)$ 满足 $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)H(x)$

证 $\Rightarrow$) 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，令 $h(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\in U^\circ(x_0)\\ f'(x_0), & x=x_0\end{cases}$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=h(x_0)\Rightarrow h(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续

故 $h(x)$ 即为满足条件的 $H(x)$

$\Leftarrow$) 若 $H(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续 且 $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)H(x)$，$x\in U^\circ(x_0)$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}H(x)=H(x_0)\Rightarrow f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导

注 该定理表明 $x=x_0$ 是函数 $g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 可去间断点的充要条件是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导

Theorem 5.6 (复合函数的导数)

若 $u=g(x)$ 在 $u=x_0$ 处可导，$y=f(u)$ 在 $u=u_0=g(x_0)$ 处可导，则复合函数 $f\circ g$ 在 $x=x_0$ 处可导，且 $(f\circ g)'(x_0)=f'(u_0)g'(x_0)$

证 由 Theorem 5.5 可知，存在一个在 $u=u_0$ 处连续的函数 $F(u)$ 满足 $f'(u_0)=F(u_0)$ 且 $f(u)-f(u_0)=(u-u_0)F(u)$，$u\in U^\circ(u_0)$

存在一个在 $x=x_0$ 处连续的函数 $G(x)$ 满足 $g'(x_0)=G(x_0)$ 且 $g(x)-g(x_0)=(x-x_0)G(x)$，$x\in U^\circ(x_0)$

则 $f(g(x))-f(g(x_0))=(g(x)-g(x_0))F(g(x))=(x-x_0)G(x)F(g(x))\Rightarrow\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=F(g(x))G(x)$

故 $(f\circ g)'(x_0)=F(g(x_0))G(x_0)=f'(u_0)g'(x_0)$

注 复合函数的导数公式亦称为链式法则，函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 对 x 的求导公式也可写作 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

Example 5.1 (基本初等函数导数公式)

- $(c)'=0$ c 为常数
- $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$，$\alpha\in\mathbb{R}$
- $(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$，$(\tan x)'=\sec^2 x$，$(\cot x)'=-\csc^2 x$，$(\sec x)'=\sec x\tan x$，$(\csc x)'=-\csc x\cot x$
- $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$
- $(a^x)'=a^x\ln a$，$a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$
- $\log_a x=\frac{1}{x\ln a}$，$a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

证 $(\sin x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)=\cos x$

$(\cos x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)=-\sin x$

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$，$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$，$\sec x=\frac{1}{\cos x}$，$\csc x=\frac{1}{\sin x}$，利用四则运算即证

$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arccos x$，$\arctan x$，$\operatorname{arccot} x$ 类似可证

$(\log_a x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\ln a}$

$(a^x)=\frac{1}{(\log_a y)'}=y\ln a=a^x\ln a$

$(x^\alpha)'=(e^{\alpha\ln x})'=e^{\alpha\ln x}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$

Example 5.2 (对数求导法)

设 $y=\frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}$，$x>4$，求 y'.

解 对两边取对数，得 $\ln y=2\ln(x+5)+\frac{1}{3}\ln(x-4)-5\ln(x+2)-\frac{1}{2}\ln(x+4)$

对两边求导，得 $\frac{y'}{y}=\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3(x-4)}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)}$

移项得 $y'=y\cdot\left(\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3(x-4)}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)}\right)=\frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3(x-4)}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)}\right)$

Definition 5.3 (双曲函数)

双曲正弦函数 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，双曲余弦函数 $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

双曲正切函数 $\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，双曲余切函数 $\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

导数：$(\sinh x)'=\cosh x$，$(\cosh x)'=\sinh x$，$(\tanh x)'=\frac{1}{\cosh^2 x}$，$(\coth x)'=-\frac{1}{\sinh^2 x}$

常用恒等式：$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

证 $(\sinh x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x$

$(\cosh x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x$

$(\tanh x)'=\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)'=\frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x}=\frac{1}{\cosh^2 x}$

$(\coth x)'=\left(\frac{1}{\tanh x}\right)'=\frac{-\tanh' x}{\tanh^2 x}=-\frac{1}{\sinh^2 x}$

$\cosh^2 x-\sinh^2 x=\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}-\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}=1$

注 对于一个已知的三角函数公式，只需将其中的三角函数转为对应的双曲函数，并将含有偶数个 $\sinh x$ 的积的项（如 $\sinh^2 x$，$\tanh^2 x$，$\coth^2 x$，$\sinh x\sinh y$）变正负号，即可得到对应的双曲函数公式.

Theorem 5.7 (参变量函数的导数)

平面曲线 C 一般的表达形式是参变量方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} t\in I$$

设 $t=t_0$ 对应曲线 C 上的点 P，则曲线 C 在点 P 的切线斜率为 $\tan\alpha=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$

证 切线的斜率可由割线的斜率取极限得，则

$$\tan\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)}{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)}=\frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)}{\Delta t}}=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

Theorem 5.8 (极坐标表示下的导数)

若曲线 C 由极坐标 $r=r(\theta)$ 表示，则曲线 C 上点 $M(r,\theta)$ 的切线斜率为 $k=\frac{r'(\theta)\tan\theta+r(\theta)}{r'(\theta)-r(\theta)\tan\theta}$，即为切线 MT 与极轴 Ox 轴夹角 α 的正切值. 向径与切线夹角 φ 的正切值则为 $\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}$.

证 $r=r(\theta)=\begin{cases} x=r\cos\theta=r(\theta)\cos\theta \\ y=r\sin\theta=r(\theta)\sin\theta \end{cases}$

$$\tan\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}=\frac{r'(\theta)\tan\theta+r(\theta)}{r'(\theta)-r(\theta)\sin\theta}$$

$$\tan\varphi=\tan(\alpha-\theta)=\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}=\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}$$

Theorem 5.9 (高阶导数的运算法则，Leibniz 公式)

$[u\pm v]^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$

$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$

证 设 $y=uv$，则

$y'=u'v+uv'$

$y''=(u'v+uv')'=u''v+2u'v'+uv''$

归纳即证

Theorem 5.10 (参量方程的二阶导数)

设 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$

证 $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

Theorem 5.11 (反函数的二阶导数)

设 $x=f^{-1}(y)$ 二次可导, 则 $(f^{-1})^{\overset{\text{对}y\text{求导}}{''}}(y) = -\frac{\overset{\text{对}x\text{求导}}{f''(x)}}{[f'(x)]^3}$

证 $\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{dx}{df(x)} \Rightarrow \frac{d^2f^{-1}(y)}{dy} = \frac{d\frac{dx}{df(x)}}{dy} = \frac{d\frac{dx}{df(x)}}{dx}\cdot \overset{=df^{-1}(y)}{\frac{dx}{dy}} = \left(\frac{1}{f'(x)}\right)^{\overset{\text{对}x\text{求导}}{'}}\cdot\frac{1}{f'(x)} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\frac{1}{f'(x)} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$

Definition 5.4 (微分)

若 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, $\exists\, A$ s.t. $\Delta y = \overset{\text{常数}}{A}\Delta x + o(\Delta x)$, 则称 f 在 $x=x_0$ 处可微, $A\Delta x$ 为 f 在 $x=x_0$ 处的微分, 记作 $dy|_{x=x_0} = A\Delta x$.

当 $A\neq 0$ 时, 称微分 dy 是增量 Δy 的线性主部.

Theorem 5.12 (可导与可微的联系)

函数 f 在 $x=x_0$ 处可导 $\Leftrightarrow$ 函数 f 在 $x=x_0$ 处可微, 且 $dy|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$

证 $\Rightarrow$) 若 f 在 $x=x_0$ 处可导, 则 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ (有限增量公式)

由微分定义即知 $dy|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$

$\Leftarrow$) 若 f 在 $x=x_0$ 处可微, 则 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + o(1)$

对两边取极限得 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(A+o(1)) = A$

Definition 5.5 (可微函数)

若函数 $y=f(x)$, $x\in I$ 满足 $\forall x_0\in I$, y 在 $x=x_0$ 处都可微, 则称 f 为 I 上的可微函数. 函数 $y=f(x)$ 在 I 上任一处的微分记作 $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$, $x\in I$

证 当 $y=f(x)=x$ 时, $dy = dx = \Delta x$, 这表明自变量的微分 dx 即为自变量的增量 Δx

Theorem 5.13 (微分的四则运算)

(1) $d[u(x)\pm v(x)] = du(x) \pm dv(x)$

(2) $d[u(x)v(x)] = v(x)du(x) + u(x)dv(x)$

(3) $d\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{v^2(x)}$

证 由导数与微分的关系即证.

Theorem 5.14 (一阶微分形式的不变性)

$d[f\circ g(x)] = f'(u)g'(x)dx$, 其中 $u=g(x)$.

证 由导数与微分的关系即证.

Definition 5.6 (高阶微分)

n 阶微分是 $n-1$ 阶微分的微分, 记作 $d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$.

证 $d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = f''(x)dx\cdot dx = f''(x)dx^2$

高阶归纳即证.

注 dx^n 表示 $(dx)^n$, d^nx 表示 x 的 n 阶微分 ($d^2x = d(dx) = 0$), $d(x^n)$ 表示 x^n 的一阶微分 ($d(x^n) = nx^{n-1}dx$)

Example 5.3 (函数的近似计算)

当 $x\approx x_0$ 时, $f(x)\approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

证 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) = dy + o(\Delta x)$

当 Δx 较小时, $\Delta y\approx dy$, 则 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

即当 $x\approx x_0$ 时, $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

Example 5.4 (误差估计)

设量x由测量得到，量y由函数$y=f(x)$计算得到．在测量时，由于存在测量误差，实际测得的是x的近似值x_0．若已知测量值x_0的误差限为δ_x，即$|\Delta x|=|x-x_0|\leq\delta_x$

则当δ_x很小时，$|\Delta y|=|f(x)-f(x_0)|\approx|f'(x_0)\Delta x|\leq|f'(x_0)|\delta_x$，相对误差限为$\frac{\delta_y}{|y_0|}=\left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right|\delta_x$

Chapter VI

Theorem 6.1 (Rolle中值定理)

若函数f满足：(i) f在闭区间$[a,b]$上连续；(ii) f在开区间(a,b)上可导；(iii) $f(a)=f(b)$

则在(a,b)上至少存在一处$x=\xi$，使得$f'(\xi)=0$.

证 f在$[a,b]$上连续，故存在最大值和最小值，分别记作M,m.

I) $M=m$

则f为常函数，$\forall x\in(a,b)$，$f'(x)=0$

II) $M\neq m$

由$f(a)=f(b)$可知，M和m至少有一个在(a,b)上的某处$x=\xi$取得，即$x=\xi$是f的极值点.

则由费马定理可知，$f'(\xi)=0$

综上，即证

Theorem 6.2 (Lagrange中值定理)

若函数f满足：(i) f在闭区间$[a,b]$上连续；(ii) f在开区间(a,b)上可导

则在(a,b)上至少存在一处$x=\xi$，使得$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

证 记$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$，则$F(a)=F(b)=0$

由Rolle中值定理，$\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $F'(x)=0\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

注 Lagrange中值定理还有如下几种等价的表示形式：

- $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$，$\xi\in(a,b)$
- $f(b)-f(a)=(b-a)f'(a+\theta(b-a))$，$\theta\in(0,1)$
- $f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$，$\theta\in(0,1)$

Theorem 6.3 (导数极限定理)

设函数f在点x_0的某邻域$U(x_0)$上连续，在$U^\circ(x_0)$上可导，且极限$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在，则$f$在点$x_0$可导，且$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$

证 $\forall x\in U_+^\circ(x_0)$，$\exists\xi\in(x_0,x)$ s.t. $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

又$x_0<\xi<x\Rightarrow$当$x\to x_0^+$时$\xi\to x_0^+$，则对上式取极限得$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(\xi)=f'(x_0+0)$

同理，$f'_-(x_0)=f'(x_0-0)$

又$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在$\Rightarrow f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$

Theorem 6.4 (Darboux定理)

设函数f在闭区间$[a,b]$上可导，且$f'_+(a)\neq f'_-(b)$，$k\in(\min\{f'_+(a),f'_-(b)\},\max\{f'_+(a),f'_-(b)\})$，则在$(a,b)$上至少存在一处$x=\xi$，使得$f'(\xi)=k$.

证 记$F(x)=f(x)-kx$，则$F'_+(a)F'_-(b)=(f'_+(a)-k)(f'_-(b)-k)<0$

不妨设$F'_+(a)<0$，$F'_-(b)>0$，则$\exists x_1\in U_+^\circ(a)$，$x_2\in U_-^\circ(b)$ s.t. $F(x_1)<F(a)<0$，$F(x_2)>F(b)>0$

又F在$[a,b]$上连续，则由最大、最小值定理可知，$\exists\xi\in[a,b]$ s.t. $\forall x\in[a,b]$，$F(x)\le F(\xi)$；由费马定理得$F'(\xi)=0$

又由$F(x_1)<F(a)<0$，$F(x_2)>F(b)>0$可知，$\xi\neq a$且$\xi\neq b$，故$\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=k$

注 相较于介值性定理，Darboux定理不要求导函数的连续性.

Theorem 6.5 (Cauchy中值定理)

若函数f,g满足：(i) f,g在闭区间$[a,b]$上连续；(ii) f,g在开区间(a,b)上可导；(iii) $f'(x)$和$g'(x)$不同时为零；(iv) $g(a)\neq g(b)$

则在 (a,b) 上至少存在一处 $x=\xi$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

证 记 $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot(g(x)-g(a))$，则 $F(a)=F(b)=0$

由 Rolle 中值定理，$\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $F'(\xi)=0\Rightarrow\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Corollary 6.1

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)\geq m$，则 $f(b)-f(a)\geq m(b-a)$

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $|f'(x)|\leq M$，则 $|f(b)-f(a)|\leq M|b-a|$

证

(1) $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$f'(\xi)\geq m\Rightarrow\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\geq m\Rightarrow f(b)-f(a)\geq m(b-a)$

(2) $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$|f'(x)|\leq M\Rightarrow\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\leq M\Rightarrow|f(b)-f(a)|\leq M|b-a|$

Theorem 6.6 （$\frac{0}{0}$ 型不定式极限的 L'Hospital 法则）

若函数 f 和 g 满足：(i) 在点 x_0 的某空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 上 f 和 g 都可导，且 $g'(x)\neq0$；(ii) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$；(iii) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

证 令 $f(x_0)=g(x_0)=0$ 使得 f 和 g 在 $x=x_0$ 处连续

由 Cauchy 中值定理得，$\forall x\in U^\circ(x_0)$，$\exists\xi\in(\min\{x,x_0\},\max\{x,x_0\})$ s.t. $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

当 $x\to x_0$ 时，$\xi\to x_0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$

注 一方面，A 可为实数，也可为 $\pm\infty$

另一方面，当 $x\to\pm\infty$ 时结论也成立

Theorem 6.7 （$\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限的 L'Hospital 法则）

若函数 f 和 g 满足：(i) 在点 x_0 的某空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 上 f 和 g 都可导，且 $g'(x)\neq0$；(ii) $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$；(iii) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

证 只需证 A 为实数，$x\to x_0^+$ 的情形，其它情形类似可证

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists x_1\in U_+^\circ(x_0)$ s.t. $\forall x\in(x_0,x_1)$，$\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

由 Cauchy 中值定理得，$\exists\xi\in(x,x_1)$ s.t. $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x_1)}{g(x)}\right)\cdot\dfrac{g(x)}{g(x)-g(x_1)}\Rightarrow A-\dfrac{\varepsilon}{2}<\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x_1)}{g(x)}\right)\cdot\dfrac{g(x)}{g(x)-g(x_1)}<A+\dfrac{\varepsilon}{2}$

又 $\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{g(x)}{g(x)-g(x_1)}=1$，由保号性可知，$\exists\delta_1>0$ s.t. $\forall x\in U_+^\circ(x_0;\delta_1)$，$\dfrac{g(x)}{g(x)-g(x_1)}>0\Rightarrow\left(1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(A-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)+\dfrac{f(x_1)}{g(x)}<\dfrac{f(x)}{g(x)}<\left(1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(A+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)+\dfrac{f(x_1)}{g(x)}$

又 $\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}\left(\left(1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(A-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)+\dfrac{f(x_1)}{g(x)}\right)=A-\dfrac{\varepsilon}{2}$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}\left(\left(1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(A+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)+\dfrac{f(x_1)}{g(x)}\right)=A+\dfrac{\varepsilon}{2}$

由保号性可知，$\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in U_+^\circ(x_0;\delta)$，$\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-A\right|<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$

注 一方面，A 可为实数，也可为 $\pm\infty$

另一方面，当 $x\to\pm\infty$ 时结论也成立

Theorem 6.8 （带有 Peano 型余项的 Taylor 公式）

若函数 f 在 $x=x_0$ 处存在 n 阶导数，则有 $f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$，式中 $T_n(x)$ 称作泰勒多项式。

证 记 $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$，$Q_n(x)=(x-x_0)^n$

由定义可知 $f^{(k)}(x_0)=T_n^{(k)}(x_0)\Rightarrow R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$

又易知 $Q_n(x_0)=Q_n'(x_0)=\cdots=Q_n^{(n-1)}(x_0)=0$，$Q_n^{(n)}=n!$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_n(x)}{Q_n(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_n'(x)}{Q_n'(x)}=\cdots=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_n^{(n-1)}(x)}{Q_n^{(n-1)}(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)}=\dfrac{1}{n!}\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)\right]=0$

$\Rightarrow R_n(x)=o((x-x_0)^n)$

注 若 $f(x)$ 满足 $f(x)=p_n(x)+o((x-x_0)^n)$，$p(n)\in\mathbb{R}[x]_{n+1}$，此时 $p(x)$ 并不一定是 $T_n(x)$，一个反例是对于 $f(x)=x^{n+1}D(x)$，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不存在二次及以上的 $T_n(x)$，但

取 $p(x)=0$ 仍然成立.

同时, 满足 $f(x)=p(x)+o((x-x_0)^n)$, $p(x)\in\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 的 $p(x)$ 是唯一的; 故当 f 在 $x=x_0$ 处存在 n 阶导数时, $p(x)$ 一定为 $T_n(x)$.

在 $x_0=0$ 处的 Taylor 公式也被称作 Maclaurin 公式.

Example 6.1 (常见函数的带有 Peano 余项的 Maclaurin 公式)

- $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$
- $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{m-1}x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m})$
- $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1})$
- $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+C_\alpha^n x^n+o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$

Theorem 6.9 (带有 Lagrange 型余项的 Taylor 公式)

若函数 f 在 $[a,b]$ 上存在 n 阶的连续导函数, 在 (a,b) 上存在 $(n+1)$ 阶导函数, 则 $\forall x,x_0\in[a,b]$, 在 (a,b) 上至少存在一处 $x=\xi$ 使得 $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

证 记 $F(t)=f(x)-\left[f(t)+f'(t)(x-t)+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right]$, $G(t)=(x-t)^{n+1}$, 则原式 $\Leftrightarrow \frac{F(x_0)}{G(x_0)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

不妨设 $x_0<x$, 则 $F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$, $G'(t)=-(n+1)(x-t)^n$

又 $F(x)=G(x)=0$, 故由 Cauchy 中值定理得, $\exists\xi\in(x_0,x)$ s.t. $\frac{F(x_0)}{G(x_0)}=\frac{F(x_0)-F(x)}{G(x_0)-G(x)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, 即证

注 此形式下的余项为 $R_n(x)=f(x)-T_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$, $\theta\in(0,1)$

进一步地, 还有形如 $R_n(x)=f(x)-T_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$ 的 Cauchy 余项

Example 6.2 (常见函数的带有 Lagrange 余项的 Maclaurin 公式)

- $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $\theta\in(0,1)$, $x\in\mathbb{R}$
- $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{m-1}x^{2m-1}}{(2m-1)!}+\frac{(-1)^m\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}$, $\theta\in(0,1)$, $x\in\mathbb{R}$
- $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}+\frac{(-1)^{m+1}\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2}$, $\theta\in(0,1)$, $x\in\mathbb{R}$
- $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$, $\theta\in(0,1)$, $x\in(-1,+\infty)$
- $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+C_\alpha^n x^n+C_\alpha^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$, $\theta\in(0,1)$, $x\in(-1,+\infty)$
- $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}}$, $\theta\in(0,1)$, $|x|<1$

Theorem 6.10 (极值的充分条件)

若 f 在 x_0 的某邻域上存在直到 $n-1$ 阶导函数, 在 $x=x_0$ 处可导, 且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq0$, 则

- 当 n 为偶数时, f 在 $x=x_0$ 处取得极值, 且当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时取得极大值, $f^{(n)}(x_0)>0$ 时取得极小值
- 当 n 为奇数时, f 在 $x=x_0$ 处不取得极值

证 $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\Rightarrow f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^n\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)\right)$

(I) 当 n 为偶数时, $(x-x_0)^n>0$, $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)$ 与 $f^{(n)}(x_0)$ 同号

故 $f^{(n)}(x_0)<0\Rightarrow f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值

$f^{(n)}(x_0)>0\Rightarrow f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值

(II) 当 n 为奇数时, $f(x)-f(x_0)$ 在 $U_-^\circ(x_0;\delta)$ 和 $U_+^\circ(x_0;\delta)$ 上异号 $\Rightarrow f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不取极值

Definition 6.1 (函数的凸性)

设 f 为定义在区间 I 上的函数, 若对 I 上任意两点 x_1,x_2 和任意实数 $\lambda\in(0,1)$,

- $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$, 则 f 为 I 上的凸函数

◦ $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$，则 f 为 I 上的凹函数

注 若式中不等号改为严格不等号，则称相应的函数为严格凸函数和严格凹函数.

Corollary 6.2

f 为 I 上的凸函数 $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2,x_3\in I$，若 $x_1<x_2<x_3$，则 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

证 $\Rightarrow$) 记 $\lambda=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$，则 $x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3$

f 为 I 上的凸函数 $\Rightarrow f(x_2)=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_3)\leq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_3)=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)$

变形即得 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

$\Leftarrow$) $\forall x_1,x_3\in I$，令 $x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3$，$\lambda\in(0,1)$，则 $\lambda=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$

则 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ 变形代入即得 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_3)\leq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_3)$

Theorem 6.11

若 f 在 I 上可导，则以下命题等价：

(1) f 为 I 上的凸函数；

(2) f' 为 I 上的增函数；

(3) $\forall x_1,x_2\in I$，$f(x_2)\geq f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)$

证 (1)$\Rightarrow$(2)) $\forall x_1,x_2\in I$，$h>0$，不妨设 $x_1<x_2$

由 $x_1-h<x_1<x_2<x_2+h\Rightarrow\frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h}\leq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}$

令 $h\to0^+$，得 $f'(x_1)\leq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq f'(x_2)\Rightarrow f'$ 为 I 上的增函数

(2)$\Rightarrow$(3)) 不妨设 $x_1<x_2$

由 Lagrange 定理，$\exists\xi\in(x_1,x_2)$ s.t. $f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

又 $f'(x_1)\leq f'(\xi)\Rightarrow\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq f'(x_1)\Rightarrow f(x_2)\geq f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)$

(3)$\Rightarrow$(1)) $\forall x_1,x_2\in I$，$\lambda\in(0,1)$，记 $x_3=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$

则有 $f(x_1)\geq f(x_3)+f'(x_3)(x_1-x_3)=f(x_3)+(1-\lambda)f'(x_3)(x_1-x_2)$，$f(x_2)\geq f(x_3)+f'(x_3)(x_2-x_3)=f(x_3)+\lambda f'(x_3)(x_2-x_1)$

$\Rightarrow\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\geq f(x_3)=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$

Collorary 6.3

若 f 在 I 上二阶可导，则 f 为 I 上的凸函数 $\Leftrightarrow f''(x)\geq0$，$x\in I$

证 由 Theorem 6.11 易证

Collorary 6.4

若 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的凸的连续函数，则 $f(x)\leq\max\{f(a),f(b)\}$

证 I) $f(x)=c$，则显然成立

II) $f(x)\neq c$

假设 $\exists x_0\in(a,b)$ s.t. $f(x)\leq f(x_0)$

则 $\forall x_1\in(a,x_0)$，$x_2\in(x_0,b)$，有 $f(x_0)\leq\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)\leq\left(\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}+\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}\right)f(x_0)=f(x_0)$

$\Rightarrow f(x_0)=f(x_1)=f(x_2)$，与 $f(x)\neq c$ 矛盾！

故 $\neg(\exists x_0\in(a,b)$ s.t. $f(x)\leq f(x_0))$

$\Rightarrow f(x)\leq\max\{f(a),f(b)\}$

Theorem 6.12 （Young 不等式）

$\forall a,b>0$，$p,q>1$，若 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则 $ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$

证 令 $x=a^p, y=b^q$

易知 $\ln x$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上为凹函数，则有 $\ln(\frac{1}{p}\cdot x+\frac{1}{q}\cdot y) \geq \frac{1}{p}\cdot\ln x+\frac{1}{q}\cdot\ln y$

代入变形即得 $ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$

Theorem 6.13 (Jensen不等式)

若 f 为 $[a,b]$ 上的凸函数，则 $\forall x_i \in [a,b]$，$\lambda_i>0$ 满足 $\sum_{i=1}^n \lambda_i=1$，则 $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$

证 当 $n=2$ 时，由函数的凸性即证

假设当 $n=k$ 时命题成立，即有 $f(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i)$

令 $\mu_i=\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}$，$i=1,2,\dots,k$，则 $\sum_{i=1}^k \mu_i=1$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i x_i) &= f((1-\lambda_{k+1})\sum_{i=1}^k \mu_i x_i+\lambda_{k+1}x_{k+1}) \\ &\leq (1-\lambda_{k+1})f(\sum_{i=1}^k \mu_i x_i)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1}) \\ &\leq (1-\lambda_{k+1})(\sum_{i=1}^k \mu_i f(x_i))+\lambda_{k+1}f(x_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i f(x_i)\end{aligned}$$

综上即证.

Theorem 6.14 (Holder不等式)

若 $a_i, b_i>0$，$i=1,2,\dots,n$，$p,q>0$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则 $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}$

证 令 $f(x)=x^{\frac{1}{q}}$，易知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为凹函数

令 $t_i=\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}$，$x_i=\frac{b_i^q}{a_i^p}$，则有 $f(\sum_{i=1}^n t_i x_i) \geq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$

代入整理即得.

Definition 6.2 (拐点)

若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处有穿过曲线的切线，且在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 中，$f(x)$ 在 $U_-^\circ(x_0)$ 和 $U_+^\circ(x_0)$ 中分别是严格凸和严格凹的（反之亦可，则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x_0)$ 的拐点.

Theorem 6.15

设 f 在 $x=x_0$ 处可导，且在某去心邻域 $U^\circ(x_0)$ 上二阶可导. 若在 $U_-^\circ(x_0)$ 和 $U_-^\circ(x_0)$ 上 $f''(x)$ 的正负性相反，则 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

证 由凸性及拐点的定义易证.

注 若 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点，$y=f(x)$ 在 x_0 的导数不一定存在. 例如 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=0$ 处.

Corollary 6.5

若 f 在 $x=x_0$ 处二阶可导，且 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点，则 $f''(x_0)=0$

证 由 Theorem 6.15 易证.

Chapter VII

Definition 7.1 (闭区间套)

若闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$满足：(i) $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$；(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$，则称$\{[a_n,b_n]\}$为闭区间套.

Theorem 7.1 (区间套定理)

若$\{[a_n,b_n]\}$是一个区间套，则存在唯一的实数ξ使得$\forall n$，$\xi\in[a_n,b_n]$.

证 由定义可知，$a_1\le a_2\le\cdots\le a_n\le\cdots\le\xi\le\cdots\le b_n\le\cdots\le b_2\le b_1$

故$\{a_n\}$单调有界 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\xi$

同理 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\xi$

下证ξ的唯一性，假设$\exists\xi'$ s.t. $\forall n$，$a_n\le\xi'\le b_n$

则$|\xi-\xi'|\le b_n-a_n\Rightarrow|\xi-\xi'|\le\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0\Rightarrow\xi'=\xi$

即证

注 开区间套不具有这样的性质，如对于$\{(0,\frac{1}{n})\}$，就不存在ξ属于每一个开区间

Corollary 7.1

若$\forall n$，$\xi\in[a_n,b_n]$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$ s.t. $\forall n>N$，$[a_n,b_n]\subset U(\xi;\varepsilon)$

证 由极限即证

Definition 7.2 (聚点)

聚点有如下等价的定义方式：

- 设S为数轴上的点集，ξ为定点，若ξ的任何邻域都含有S中无穷多个点，则称ξ为点集S的一个聚点.
- 对于点集S，若$\forall\varepsilon>0$，$U^\circ(\xi;\varepsilon)\cap S\ne\varnothing$，则称$\xi$为点集$S$的一个聚点.
- 若存在各项互异的收敛数列$\{x_n\}\subset S$，则其极限$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\xi$称为点集$S$的一个聚点.

注 ξ可以属于S，也可以不属于S.

Theorem 7.2 (Weierstrass 聚点定理)

实轴上的任一有界无限点集S至少有一个聚点.

证 因S为有界点集，故存在$M>0$，使得$S\subset[-M,M]$，记$[a_1,b_1]=[-M,M]$

现将$[a_1,b_1]$等分为子区间$[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$，$[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$，则这两个子区间至少有一个含有S中无穷多个点，记此子区间为$[a_2,b_2]$.

则$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，$b_2-a_2=\frac{1}{2}(b_1-a_1)=M$

按此步骤继续等分区间，即得区间列$\{[a_n,b_n]\}$，由于$\forall n$，$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$，$\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{M}{2^n}=0$，故$\{[a_n,b_n]\}$是一个区间套，且其中每个闭区间都含有$S$中无穷多个点.

由区间套定理，存在唯一的一点ξ使得$\forall n$，$\xi\in[a_n,b_n]\Rightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$ s.t. $\forall n>N$，$[a_n,b_n]\subset U(\xi;\varepsilon)\Rightarrow U^\circ(\xi;\varepsilon)\cap S\ne\varnothing$

故ξ是S的一个聚点

注 致密性定理是聚点定理的一种特殊情形，只需将有界数列$\{x_n\}$看作有界点集S即可.

Definition 7.3 (开覆盖)

设S为数轴上的点集，H为开区间的集合，若S中任何一点都含在H中至少一个开区间内，则称H为S的一个开覆盖，视H中开区间的个数是无限（有限）的，称H为S的一个无限（有限）开覆盖.

Theorem 7.3 (Heine - Borel 有限覆盖定理)

设 H 为闭区间 $[a,b]$ 的一个无限开覆盖，则存在 H 的一个有限子集 H'，使得 H' 为闭区间 $[a,b]$ 的一个有限开覆盖.

证 假设命题不成立，即 $[a,b]$ 不能用 H 中有限个开区间覆盖，记 $[a_1,b_1]=[a,b]$

则将 $[a_1,b_1]$ 等分为子区间 $[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$，$[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$，则这两个子区间至少有一个不能用 H 中有限个开区间覆盖，记此子区间为 $[a_2,b_2]$.

则 $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，$b_2-a_2=\frac{1}{2}(b_1-a_1)=M$

按此步骤继续等分区间，即得区间列 $\{[a_n,b_n]\}$. 由于 $\forall n$, $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$，$\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b-a}{2^{n-1}}=0$，故 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一个区间套，且其中每个闭区间都不能用 H 中有限个开区间覆盖

由区间套定理，存在唯一的一点 ξ 使得 $\forall n$, $\xi\in[a_n,b_n]$. 故 $\exists(\alpha,\beta)\in H$ s.t. $\xi\in(\alpha,\beta)$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0\Rightarrow$ 当 n 充分大时，$[a_n,b_n]\subset(\alpha,\beta)$，与 $\{[a_n,b_n]\}$ 中每个闭区间都不能用 H 中有限个开区间覆盖矛盾！

故命题成立

注 该定理只对闭区间 $[a,b]$，对开区间 (a,b) 不一定成立.

Chapter Ⅷ

Definition 8.1 (原函数与不定函数)

设函数f与F在区间I上都有定义. 若$F'(x)=f(x), x\in I$, 则称F为f在区间I上的一个原函数.

函数f在区间I上的全体原函数称为f在I上的不定积分, 记作$\int f(x)dx$. 由定义可见, $\int f(x)dx = F(x)+C$, 其中C称作积分常数, 可取任一函数值.

Example 8.1 (基本积分表)

- $\int 0\,dx = C$
- $\int 1\,dx = x + C$
- $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha\neq -1, x>0)$
- $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C \quad (x\neq 0)$
- $\int e^{x}dx = e^{x}+C$
- $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a}+C \quad (a>0, a\neq 1)$
- $\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}+C \quad (a\neq 0)$
- $\int \sin ax\,dx = \frac{-\cos ax}{a}+C \quad (a\neq 0)$
- $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
- $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
- $\int (\sec x)(\tan x)\,dx = \sec x + C$
- $\int (\csc x)(\cot x)\,dx = -\csc x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C$

Theorem 8.1 (不定积分的线性性)

当k_1, k_2不同时为零时, $\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)]dx = k_1\int f(x)dx + k_2\int g(x)dx$

证 $[k_1\int f(x)dx + k_2\int g(x)dx]' = k_1(\int f(x)dx)' + k_2(\int g(x)dx)' = k_1 f(x) + k_2 g(x)$

注 显然此线性性可推广至任意多个函数

Theorem 8.2 (第一换元积分法/凑微分法)

设函数$f(x)$在区间I上有定义, $\varphi(t)$在区间J上可导, 且$\varphi(J)\subseteq I$. 当不定积分$\int f(x)dx = F(x)+C$在I上存在时, 不定积分$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$在$J$上也存在, 且有$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))+C$

证 $\frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

注 该公式常用如下简便形式:

$$\begin{aligned}\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt &= \int f(\varphi(t))\,d\varphi(t)\\ &= \int f(x)\,dx \qquad (令\ x=\varphi(t))\\ &= F(x)+C\\ &= F(\varphi(t))+C\end{aligned}$$

Theorem 8.3 (第二换元积分法/代入换元法)

设函数$f(x)$在区间I上有定义, $\varphi(t)$在区间J上可导, $\varphi(J)=I$. 且$x=\varphi(t)$在区间J上存在反函数$t=\varphi^{-1}(x), x\in I$. 当不定积分$\int f(x)dx = F(x)+C$在$I$上存在, 不定积分$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = G(t)+C$在$J$上也存在时, 在$I$上有$\int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x))+C$

证 设 $\int f(x)\,dx = F(x)+C$，则 $\frac{d}{dx}(F(\varphi(t)) - G(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) - G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) - f(\varphi(t))\varphi'(t) = 0$

$\Rightarrow F(\varphi(t)) - G(t) = C \Rightarrow G(\varphi^{-1}(x)) = F(x) - C$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(G(\varphi^{-1}(x))) = F'(x) = f(x)$

注 不定积分 $\int f(x)\,dx$ 存在是该定理成立的必要条件，否则可能存在第一类间断点。

若将条件"$x=\varphi(t)$ 在 J 上存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x), x\in I$"加强为"$\varphi'(t)\neq 0, x\in J$"，则该定理也成立。

Theorem 8.4 （分部积分法）

若不定积分 $\int u'(x)v(x)\,dx$ 存在，则不定积分 $\int u(x)v'(x)\,dx$ 也存在，且 $\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$

证 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \Rightarrow u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x)$

对两边求不定积分即得

Example 8.2 （有理函数的不定积分）

有理函数是指由两个多项式函数的商所表示的函数，其一般形式为 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_n}{\beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + \cdots + \beta_m}$。若 $m>n$ 则称它为真分式；若 $m\le n$，则称它为假分式。由于假分式可以变形为一个多项式和一个真分式之和，故只需求真分式的不定积分。

由 Bézout 定理，若多项式 $Q_1(x)$ 和 $Q_2(x)$ 是互质的，则存在多项式 $P_1(x), P_2(x)$ 使得 $P_1(x)Q_1(x) + P_2(x)Q_2(x) = 1$，则 $\frac{1}{Q_1(x)Q_2(x)} = \frac{P_1(x)Q_1(x)+P_2(x)Q_2(x)}{Q_1(x)Q_2(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_2(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_1(x)}$，故有理真分式必定可以表示成若干个部分分式之和，这一过程称作部分分式分解。具体地说，分解部分分式分为以下三步：

Step 1 对分母 $Q(x)$ 在实系数内作标准分解：$Q(x) = (x-a_1)^{\lambda_1}\cdots(x-a_s)^{\lambda_s}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{\mu_t}$，其中 $\sum_{i=1}^{s}\lambda_i + 2\sum_{i=1}^{t}\mu_i = m$，$p_i^2 - 4q_i < 0$

Step 2 待定系数作部分分式分解：$R(x) = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{A_{i1}}{x-a_i} + \frac{A_{i2}}{(x-a_i)^2} + \cdots + \frac{A_{i\lambda_i}}{(x-a_i)^{\lambda_i}}\right) + \sum_{i=1}^{t}\left(\frac{B_{i1}x+C_{i1}}{x^2+p_ix+q_i} + \frac{B_{i2}x+C_{i2}}{(x^2+p_ix+q_i)^2} + \cdots + \frac{B_{i\mu_i}x+C_{i\mu_i}}{(x^2+p_ix+q_i)^{\mu_i}}\right)$

Step 3 确定待定系数：一般地，将所有部分分式通分相加，比较各项系数求解即可，但这一方法往往计算量过大，此时可将 x 的某些特定值（如 $Q(x)=0$ 的根）代入求解，以相对简单地求得待定系数

通过部分分式分解，求真分式的不定积分就转化为了求部分分式的不定积分，分为以下两类：

(i) $\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} \ln|x-a| + C, & k=1 \\ \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C, & k>1 \end{cases}$

(ii) $\int \frac{Lx+M}{(x^2+px+q)^k}\,dx$

令 $t = x+\frac{p}{2}$，则 $\int \frac{Lx+M}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{Lt+N}{(t^2+r^2)^k}\,dt = L\int \frac{t}{(t^2+r^2)^k}\,dt + N\int \frac{dt}{(t^2+r^2)^k}$，其中 $r^2 = q-\frac{p^2}{4}$，$N = M-\frac{p}{2}L$

当 $k=1$ 时，$\int \frac{t}{t^2+r^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+r^2) + C$，$\int \frac{dt}{t^2+r^2} = \frac{1}{r}\arctan\frac{t}{r} + C$

当 $k\ge 2$ 时，$\int \frac{t}{(t^2+r^2)^k}\,dt = \frac{1}{2(1-k)(t^2+r^2)^{k-1}} + C$

记 $I_k = \int \frac{dt}{(t^2+r^2)^k}$，则 $I_k = \frac{1}{r^2}\int \frac{(t^2+r^2)-t^2}{(t^2+r^2)^k}\,dt = \frac{1}{r^2}I_{k-1} - \frac{1}{r^2}\int \frac{t^2}{(t^2+r^2)^k}\,dt = \frac{1}{r^2}I_{k-1} + \frac{1}{2r^2(k-1)}\int t\,d\left(\frac{1}{(t^2+r^2)^{k-1}}\right) = \frac{1}{r^2}I_{k-1} + \frac{1}{2r^2(k-1)}\int t\,d\left(\frac{1}{(t^2+r^2)^{k-1}}\right)$

$= \frac{t}{2r^2(k-1)(t^2+r^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2r^2(k-1)}I_{k-1}$

综上，即可完成对 $R(x)$ 的不定积分的计算

Definition 8.2 （有理式）

由 $u(x), v(x)$ 及常数经过有限次四则运算所得到的函数称作关于 $u(x), v(x)$ 的有理式，记作 $R(u(x), v(x))$。

Example 8.3 （其它可化为有理函数的函数形式）

- $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

  令 $t = \tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

  $\Rightarrow \int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$

- $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x\cos x)\,dx$

  令 $t = \tan x$，则 $\sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}$，$\cos^2 x = \frac{1}{t^2+1}$，$\sin x\cos x = \frac{t}{t^2+1}$，$dx = (t^2+1)\,dt$

  $\Rightarrow \int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x\cos x)\,dx = \int R\left(\frac{t^2}{t^2+1}, \frac{1}{t^2+1}, \frac{t}{t^2+1}\right)(t^2+1)\,dt$

- $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

  令 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，即可化为有理函数的不定积分

- $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$，$(a>0 \wedge b^2-4ac \neq 0) \vee (a<0 \wedge b^2-4ac>0)$

  $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$，令 $u=x+\frac{b}{2a}$，$k^2=\left|\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right|$，则 ax^2+bx+c 必可变形为 $|a|(u^2+k^2)$，$|a|(u^2-k^2)$，$|a|(k^2-u^2)$ 三种情形之一

  则 $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ 必可转化为 $\int R\left(u, \sqrt{u^2+k^2}\right) du$，$\int R\left(u, \sqrt{u^2-k^2}\right) du$，$\int R\left(u, \sqrt{k^2-u^2}\right) du$ 三种情形之一

  对应分别令 $u=k\tan t$，$u=k\sec t$，$u=k\sin t$，即可化为三角有理式的不定积分，进而化为有理函数的不定积分

注 一般地，若二次三项式 ax^2+bx+c 中 $a>0$，则可令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,x \pm t$；若二次三项式 ax^2+bx+c 中 $c>0$，则可令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt \pm \sqrt{c}$，这类变换称作 Euler 变换

Chapter IX

Definition 9.1 (定积分)

设闭区间$[a,b]$上有$n-1$个点，依次为$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，它们将$[a,b]$分成$n$个小区间$\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\dots,n$，则这些闭子区间构成对$[a,b]$的一个分割，记作$T=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}=\{\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_n\}$. 记小区间$\Delta_i$的长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，则有分割$T$的模$\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$

设f是定义在$[a,b]$上的一个函数. 对于$[a,b]$的一个分割$T=\{\Delta_1,\dots,\Delta_n\}$，任取点$\xi_i\in\Delta_i$, $i=1,\dots,n$，作和式$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，称作函数$f$在$[a,b]$上的一个积分和或Riemann和.

若存在一个确定的实数J，使得对任意的正数ε，总存在某一正数δ，使得对$[a,b]$的任意分割T及相应的介点集$\{\xi_i\}$，只要$\|T\|<\delta$，就有$\left|\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon$，则称函数$f$在$[a,b]$上可积(或Riemann可积)，$J$为$f$在$[a,b]$上的积分(或Riemann积分)，记作$J=\int_a^b f(x)dx$，其中$f$称作被积函数，$x$称作积分变量，$[a,b]$称作积分区间，$a,b$分别称作定积分的下限和上限.

注 $\|T\|$可反映分割T的细密程度. 对于每一个确定的分割T，$\|T\|$是唯一确定的；但具有同一细度$\|T\|$的分割T有无限多个.

积分和既与分割T有关，也与选取的介点集$\{\xi_i\}$有关.

常用极限记号表达定积分，即$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)x_i$

Corollary 9.1

若T'是T增加若干分点后所得的分割，则$\sum\limits_{T'}\omega_i'\Delta x_i'\le\sum\limits_{T}\omega_i\Delta x_i$.

证 $\forall\xi\in\Delta_i=[a,b]$，记$M_0=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, $M_1=\sup\limits_{x\in[a,\xi]}f(x)$, $M_2=\sup\limits_{x\in[\xi,b]}f(x)$, $m_0=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, $m_1=\inf\limits_{x\in[a,\xi]}f(x)$, $m_2=\inf\limits_{x\in[\xi,b]}f(x)$，则$M_1\le M_0$, $M_2\le M_0$, $m_1\ge m_0$, $m_2\ge m_0$

$\Rightarrow M_1-m_1\le M_0-m_0$, $M_2-m_2\le M_0-m_0$

$\Rightarrow (M_1-m_1)(\xi-a)+(M_2-m_2)(b-\xi)\le(M_0-m_0)(\xi-a)+(M_0-m_0)(b-\xi)=(M_0-m_0)(b-a)$

即证

Theorem 9.1 (Newton-Leibniz 公式)

若函数f在$[a,b]$上连续，其原函数为$F(x)$，则$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$.

证 对于$[a,b]$的任一分割$T=\{a=x_0,x_1,\dots,x_n=b\}$，对任意$\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$，由Lagrange中值定理得，$\exists\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$, $i=1,2,\dots,n$ s.t. $F(x_i)-F(x_{i-1})=(x_i-x_{i-1})F'(\eta_i)\Rightarrow F(x_i)-F(x_{i-1})=f(\eta_i)\Delta x_i$

$\Rightarrow F(b)-F(a)=\sum\limits_{i=1}^{n}(F(x_i)-F(x_{i-1}))=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i$

f在$[a,b]$上连续$\Rightarrow f$在$[a,b]$上一致连续$\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ s.t. $\forall x',x''\in[a,b]$，若$|x'-x''|<\delta$，则$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$

则当$\Delta x_i\le\|T\|<\delta$时，$\forall\xi_i\in\Delta_i$, $|\xi_i-\eta_i|<\delta$

$\Rightarrow\left|\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-(F(b)-F(a))\right|=\left|\sum\limits_{i=1}^{n}[f(\xi_i)-f(\eta_i)]\Delta x_i\right|\le\sum\limits_{i=1}^{n}|f(\xi_i)-f(\eta_i)|\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon$

$\Rightarrow f$在$[a,b]$上可积，且$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

注 定理条件可适当减弱：

对F可减弱为：在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，且除有限个点外有$F'(x)=f(x)$.

对f可减弱为：在$[a,b]$上可积(不一定连续).

严谨地说，此证明中未表明$F(x)$的存在性. 事实上，连续函数必有原函数，这一定理的证明将在之后给出.

Theorem 9.2 (可积的必要条件)

若函数f在$[a,b]$上可积，则f在$[a,b]$上必定有界.

证 假设f在$[a,b]$上无界

则对于$[a,b]$的任意分割T，$\exists k\in\{1,2,\dots,n\}$ s.t. f在Δ_k上无界.

$\forall i\in\{1,2,\dots,n\}\setminus\{k\}$，任取$\xi_i\in\Delta_i$，记$G=\left|\sum\limits_{i\ne k}f(\xi_i)\Delta x_i\right|$

则$\forall M>0$, $\exists\xi_k\in\Delta_k$ s.t. $|f(\xi_k)|>\frac{M+G}{\Delta x_k}\Rightarrow\left|\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|\ge|f(\xi_k)\Delta x_k|-\left|\sum\limits_{i\ne k}f(\xi_i)\Delta x_i\right|>\frac{M+G}{\Delta x_k}\cdot\Delta x_k-G=M$

$\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上不可积，矛盾！

故 f 在 $[a,b]$ 上有界.

注 可积函数一定有界，但有界函数不一定可积.

Definition 9.2 (Darboux和)

设 $T=\{\Delta_1,\dots,\Delta_n\}$ 为对 $[a,b]$ 的任意分割，由 f 在 $[a,b]$ 上有界，则 f 在每个 Δ_i 上存在上、下确界，记 $M_i=\sup\limits_{x\in\Delta_i}f(x)$，$m_i=\inf\limits_{x\in\Delta_i}f(x)$，$i=1,\dots,n$.
记 $\omega_i=M_i-m_i$，称作 f 在 Δ_i 上的振幅.

记 $S(T)=\sum\limits_{i=1}^{n}M_i x_i$，$s(T)=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i x_i$，分别称作 f 关于分割 T 的上和与下和（或 Darboux 上和与 Darboux 下和，统称 Darboux 和）

Corollary 9.2

$\omega_i=\sup\limits_{x',x''\in\Delta_i}|f(x')-f(x'')|$

证 $\forall x',x''\in\Delta_i$，不妨设 $f(x')\geq f(x'')$

$f(x')\leq\sup\limits_{x\in\Delta_i}f(x)$，$f(x'')\geq\inf\limits_{x\in\Delta_i}f(x)\Rightarrow|f(x')-f(x'')|=f(x')-f(x'')\leq\sup\limits_{x\in\Delta_i}f(x)-\inf\limits_{x\in\Delta_i}f(x)$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists x',x''\in\Delta_i$ s.t. $f(x)>\sup\limits_{x\in\Delta_i}f(x)-\frac{\varepsilon}{2}$，$f(x'')<\inf\limits_{x\in\Delta_i}f(x)+\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow|f(x')-f(x'')|>\sup\limits_{x\in\Delta_i}f(x)-\inf\limits_{x\in\Delta_i}f(x)-\varepsilon$

综上，$\sup\limits_{x\in\Delta_i}f(x)-\inf\limits_{x\in\Delta_i}f(x)=\sup\limits_{x',x''\in\Delta_i}|f(x)-f(x'')|$

注 此即振幅的另一种定义方式.

Corollary 9.3

$\forall\xi_i\in\Delta_i$，$i=1,\dots,n$，$s(T)\leq\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\leq S(T)$

证 显然.

Theorem 9.3 (可积准则)

函数 f 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists T$ s.t. $S(T)-s(T)=\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$.

Theorem 9.4

若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

证 f 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上一致连续 $\Rightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ s.t. $\forall x',x''\in[a,b]$，若 $|x'-x''|<\delta$，则 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$

故当 $\|T\|<\delta$，$\forall\Delta_i$，$\omega_i=M_i-m_i=\sup\limits_{x',x''\in\Delta_i}|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$

$\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i=\varepsilon\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上可积

Theorem 9.5

若 f 在 $[a,b]$ 有界且只有有限个间断点，则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

证 只需证对于 f 在 $[a,b]$ 上只有 $x=b$ 一个间断点的情形.

记 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，$m=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，当 $m=M$ 时，f 为常量函数，显然可积.

$\forall\varepsilon>0$，令 $\delta'\in(0,\min\{\frac{\varepsilon}{2(M-m)},b-a\}$，记 ω' 为 f 在区间 $\Delta'=[b-\delta',b]$ 上的振幅，则 $\omega'\delta'<(M-m)\cdot\frac{\varepsilon}{2(M-m)}=\frac{\varepsilon}{2}$

又 f 在 $[a,b-\delta']$ 上连续 $\Rightarrow f$ 在 $[a,b-\delta']$ 上可积 $\Rightarrow$ 存在对 $[a,b-\delta']$ 的某个分割 $T'=\{\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_{n-1}\}$，使得 $\sum\limits_{T'}\omega_i\Delta_i$

则 $T=\{\Delta_1,\dots,\Delta_{n-1},\Delta'\}$ 是对 $[a,b]$ 的一个分割，且 $\sum\limits_{T}\omega_i\Delta_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

Theorem 9.6

若 f 在 $[a,b]$ 上单调，则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

证 不妨设 f 在 $[a,b]$ 上单增，则对 $[a,b]$ 的任一分割 T，$\forall\Delta_i\in T$，$\omega_i=f(x_i)-f(x_{i-1})$

故 $\sum\limits_{T}\omega_i\Delta x_i\leq\sum\limits_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\|T\|=[f(b)-f(a)]\|T\|$

故 $\forall \varepsilon>0$，只需令 $\|T\|<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$，则 $\sum_T \omega_i \Delta x_i<\varepsilon$

$\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上可积

注　单调函数即使有无限多个间断点，仍具有可积性.

Theorem 9.7（定积分的线性性）

• 若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 kf 在 $[a,b]$ 上也可积，且 $\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$

• 若 f,g 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f\pm g$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且 $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$

证　$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$ s.t. 当 $\|T\|<\delta$ 时，$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<\frac{\varepsilon}{|k|}$

则 $\left|\sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i-kJ\right|=|k|\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon$

$\Rightarrow kf$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta_1,\delta_2>0$ s.t. 当 $\|T\|<\delta_1$ 时，$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i'-J_1\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，当 $\|T\|<\delta_2$ 时，$\left|\sum_{i=1}^n g(\eta_i)\Delta x_i''-J_2\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

则 $\exists \delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ s.t. 当 $\|T\|<\delta$ 时，$\left|\sum_{i=1}^n [f(\xi_i)\pm g(\eta_i)]\Delta x_i-(J_1+J_2)\right|=\left|\left(\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-J_1\right)\pm\left(\sum_{i=1}^n g(\eta_i)\Delta x_i-J_2\right)\right|<\varepsilon$

$\Rightarrow f\pm g$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$.

Theorem 9.8

若 f,g 在 $[a,b]$ 上可积，则 fg 在 $[a,b]$ 上也可积.

证　f,g 在 $[a,b]$ 上可积 $\Rightarrow f,g$ 在 $[a,b]$ 上有界. 设 $A=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$，$B=\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|$

若 $A=0$ 或 $B=0$，则 $f(x)g(x)\equiv 0$，命题显然成立.

当 $A>0$ 且 $B>0$ 时，$\forall \varepsilon>0,\ \exists T_1,T_2$ s.t. $\sum_{T_1}\omega_i^f\Delta x_i^f<\frac{\varepsilon}{2B}$，$\sum_{T_2}\omega_i^g\Delta x_i^g<\frac{\varepsilon}{2A}$

令 $T=T_1\cup T_2$，则 $\forall \Delta_i$，$\omega_i^{fg}=\sup_{x',x''\in\Delta_i}|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|\le\sup_{x',x''\in\Delta_i}(|g(x')||f(x')-f(x'')|+|f(x'')||g(x')-g(x'')|)\le B\omega_i^f+A\omega_i^g$

$\Rightarrow \sum_T\omega_i^{fg}\Delta x_i\le B\sum_T\omega_i^f\Delta x_i+A\sum_T\omega_i^g\Delta x_i\le B\sum_{T_1}\omega_i^f\Delta x_i+A\sum_{T_2}\omega_i^g\Delta x_i<B\cdot\frac{\varepsilon}{2B}+A\cdot\frac{\varepsilon}{2A}=\varepsilon$

$\Rightarrow fg$ 在 $[a,b]$ 上可积

注　一般情形下，$\int_a^b f(x)g(x)\,dx\ne\int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_a^b g(x)\,dx$

Theorem 9.9（关于积分区间的可加性）

f 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件为 $\forall c\in[a,b]$，f 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上都可积. 此时有 $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b g(x)\,dx$

证　$\Rightarrow$) $\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 对于 $[a,c]$ 的 T_1，对于 $[c,b]$ 的 T_2 s.t. $\sum_{T_1}\omega_i'\Delta x_i'<\frac{\varepsilon}{2}$，$\sum_{T_2}\omega_i''\Delta x_i''<\frac{\varepsilon}{2}$

令 $T=T_1\cup T_2$，则 $\sum_T\omega_i\Delta x_i=\sum_{T_1}\omega_i'\Delta x_i'+\sum_{T_2}\omega_i''\Delta x_i''<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上可积

$\Leftarrow$) $\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 对于 $[a,b]$ 的 T s.t. $\sum_T\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$.

令 $T^*=T\cup\{c\}$，则 $\sum_{T^*}\omega_i^*\Delta x_i^*\le\sum_T\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$

又 $T^*=T_1\cup T_2$，其中 T_1,T_2 分别是对 $[a,c]$，$[c,b]$ 的分割，则 $\sum_{T_1}\omega_{1i}\Delta x_{1i}\le\sum_{T^*}\omega_i^*\Delta x_i^*<\varepsilon$，$\sum_{T_2}\omega_{2i}\Delta_{2i}\le\sum_T\omega_i^*\Delta x_i^*<\varepsilon$

$\Rightarrow f$ 在 $[a,c]$，$[c,b]$ 上可积

$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_T\omega_i\Delta x_i=\lim_{\|T^*\|\to 0}\sum_{T^*}\omega_i^*\Delta x_i^*=\lim_{\|T_1\|\to 0}\sum_{T_1}\omega_{1i}\Delta x_{1i}+\lim_{\|T_2\|\to 0}\sum_{T_2}\omega_{2i}\Delta x_{2i}\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

Theorem 9.10（积分不等式性）

若 f,g 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)\le g(x)$，$x\in[a,b]$，则 $\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$

证　令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(x)\ge 0$，$x\in[a,b]$，$\int_a^b F(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$

$\int_a^b F(x)\,dx=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\ge 0$

$\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$

Theorem 9.11

若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且 $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

证 $\forall \varepsilon>0, \exists T$ s.t. $\sum_T \omega_i^f \Delta x_i < \varepsilon$

$\omega_i^f = \sup_{x',x''\in\Delta_i} |f(x')-f(x'')|$，$\omega_i^{|f|} = \sup_{x',x''\in\Delta_i} \left||f(x')|-|f(x'')|\right|$

又 $\left||f(x')|-|f(x'')|\right| \le |f(x')-f(x'')| \Rightarrow \omega_i^{|f|} \le \omega_i^f$

$\Rightarrow \sum_T \omega_i^{|f|}\Delta x_i \le \sum_T \omega_i^f \Delta x_i < \varepsilon$

$\Rightarrow |f|$ 在 $[a,b]$ 上可积，$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

注 该性质的逆命题一般不成立，如 $f(x)=D(x)-\frac{1}{2}$

Theorem 9.12 （积分第一中值定理）

若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi)$.

证 f 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow f$ 存在最大值 M 和最小值 m，设 $f(\alpha)=M$，$f(\beta)=m$，不妨设 $\alpha<\beta$

$\Rightarrow m\le f(x)\le M \Rightarrow m(b-a)\le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \Rightarrow m\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$

由连续函数的介值性，$\exists \xi\in(\alpha,\beta)\subseteq(a,b)$ s.t. $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Theorem 9.13 （推广积分第一中值定理）

若 f 与 g 都在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上同号，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$.

证 f 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow f$ 存在最大值 M 和最小值 m，设 $f(\alpha)=M$，$f(\beta)=m$，不妨设 $\alpha<\beta$

不妨设 $g(x)>0$，$x\in[a,b]$，则 $\int_a^b g(x)\,dx>0$，$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow m\le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le M$

由连续函数的介值性，$\exists \xi\in(\alpha,\beta)\subseteq(a,b)$ s.t. $f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$

Definition 9.3 （变限积分）

若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则有 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$，$x\in[a,b]$，$\Psi(x)=\int_x^b f(t)\,dt$，$x\in[a,b]$，分别称作变上限的微积分和变下限的微积分，统称变限积分.

注 一般在变限积分中不把积分变量写作 x，以免与积分上下限中的 x 冲突.

由于 $\int_x^b f(t)\,dt = -\int_b^x f(t)\,dt$，故一般只讨论变上限积分的情形.

Theorem 9.14

若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 Φ 在 $[a,b]$ 上连续.

证 f 在 $[a,b]$ 上可积 $\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上有界 $\Rightarrow \exists M>0$ s.t. $|f(x)|\le M$

$\forall x\in[a,b]$，$\Delta\Phi = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \Rightarrow |\Delta\Phi| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right| \le \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt \le M|\Delta x|$

$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi = 0 \Rightarrow \Phi$ 在 $[a,b]$ 上连续

Theorem 9.15 （原函数存在定理 / 微积分学基本定理）

若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 Φ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\Phi'(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$.

证 $\forall x\in[a,b]$，$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$

由积分第一中值定理得，$\exists \theta\in[0,1]$ s.t. $\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = (\Delta x)f(x+\theta(\Delta x)) \Rightarrow \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(x+\theta(\Delta x))$

又 f 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow \Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\theta(\Delta x)) = f(x)$

即证

注 常写作 $\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C$

Theorem 9.16 （积分第二中值定理）

设 f 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)\ge 0$

(i) 若 g 在 $[a,b]$ 上单减，则 $\exists\xi\in[a,b]$ s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx$

(ii) 若 g 在 $[a,b]$ 上单增，则 $\exists\eta\in[a,b]$ s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_\eta^a f(x)\,dx$

证 下证 (i)，(ii) 类似可证.

当 $g(a)=0$ 时，$g(x)\equiv 0$，$x\in[a,b]$，此时原式显然成立.

当 $g(a)>0$ 时，令 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$，$x\in[a,b]$，则原式 $\Leftrightarrow \Phi(\xi)=\int_a^\xi f(t)\,dt = \frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)\,dx$

f 在 $[a,b]$ 上可积 $\Rightarrow \Phi$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow \Phi$ 在 $[a,b]$ 上存在最大值 M，最小值 m.

由介值性定理，原式 $\Leftrightarrow m\le \frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M \Leftrightarrow mg(a)\le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le Mg(a)$

f 在 $[a,b]$ 上可积 $\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上有界 $\Rightarrow \exists L>0$ s.t. $|f(x)|\le L$，$x\in[a,b]$

g 在 $[a,b]$ 上单增 $\Rightarrow g$ 在 $[a,b]$ 上可积 $\Rightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists T$ s.t. $\sum_T \omega_i^g\Delta x_i < \frac{\omega}{L}$

记 $I=\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\,dx = \sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}[g(x)-g(x_{i-1})]f(x)\,dx + \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = I_1+I_2$

$|I_1|\le \sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|g(x)-g(x_{i-1})||f(x)|\,dx \le L\cdot\sum_{i=1}^n \omega_i^g\Delta x_i < L\cdot\frac{\varepsilon}{L}=\varepsilon$

又 $F(a)=0 \Rightarrow \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \int_a^{x_i} f(x)\,dx - \int_a^{x_{i-1}} f(x)\,dx = F(x_i)-F(x_{i-1})$

$\Rightarrow I_2 = \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})[F(x_i)-F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)[g(x_{i-1})-g(x_i)] + F(b)g(x_{n-1})$

$\Rightarrow I_2 \le M\sum_{i=1}^{n-1}[g(x_{i-1})-g(x_i)] + Mg(x_{n-1}) = Mg(a)$，$I_2 \ge m\sum_{i=1}^{n-1}[g(x_{i-1})-g(x_i)] + mg(x_{n-1}) = mg(a)$

又 $I=I_1+I_2 \Rightarrow -\varepsilon+mg(a)\le I\le Mg(a)+\varepsilon$

又 ε 任意小 $\Rightarrow mg(a)\le I\le Mg(a)$

即证

Corollary 9.4

设 f 在 $[a,b]$ 上可积，g 在 $[a,b]$ 上单调，则 $\exists\xi\in[a,b]$ s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$.

证 若 g 在 $[a,b]$ 上单减，令 $h(x)=g(x)-g(b)$，则 $h(x)\ge 0$ 且 h 在 $[a,b]$ 上单减.

由积分第二中值定理得，$\exists\xi\in[a,b]$ s.t. $\int_a^b f(x)h(x)\,dx = h(a)\int_a^\xi f(x)\,dx = [g(a)-g(b)]\int_a^\xi f(x)\,dx$

又 $\int_a^b f(x)h(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx - g(b)\int_a^b f(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_a^b f(x)\,dx + [g(a)-g(b)]\int_a^\xi f(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$

若 g 在 $[a,b]$ 上单增，只需令 $h(x)=g(x)-g(a)$，类似可证.

Theorem 9.17 (定积分换元积分法)

若 f 在 $[a,b]$ 上连续，φ' 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积，且 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，$\varphi([\alpha,\beta])\subseteq[a,b]$，则有 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$

证 f 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow f$ 存在原函数，记为 F.

$\frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \Rightarrow F(\varphi(t))$ 是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的原函数

$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

Theorem 9.18 (定积分分部积分法)

若 u,v 在 $[a,b]$ 上可导，u',v' 在 $[a,b]$ 上可积，则有 $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$

证 uv 是 $(uv'+u'v)$ 的原函数 $\Rightarrow \int_a^b[u(x)v'(x)+u'(x)v(x)]\,dx = \int_a^b u(x)v'(x)\,dx + \int_a^b u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b$

即证

注 其推广形式为：$\int_a^b u(x)v^{(n+1)}(x)\,dx = \left(\sum_{k=0}^n(-1)^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)\right)\Big|_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}(x)v(x)\,dx$，由数学归纳法易证.

Corollary 9.5 (Wallis 公式)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}$$

证 考察 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

记 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$，则 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx = -\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx = (n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$

$\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

又 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$

则递推得 $I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$, $I_{2n+1} = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$

又 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \, dx \Rightarrow \frac{2n!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \Rightarrow A_n = \left(\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n} = B_n$

$\Rightarrow B_n - A_n < \frac{1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (B_n - A_n) = 0$

又 $\frac{\pi}{2} - A_n < B_n - A_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \frac{\pi}{2}$

注 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$

Theorem 9.19 (带有积分型余项的Taylor公式)

若f在$x=x_0$处的某邻域$U(x_0)$上有$n+1$阶连续导函数，则有 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$.

证 由推广的分部积分公式得

$\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \left((x-t)^n f^{(n)}(t) + n(x-t)^{n-1} f^{(n-1)}(t) + \cdots + n! f(t)\right)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} 0 \cdot f(t) dt = n!\left(f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x_0)^k\right)$

$\Rightarrow R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$

Theorem 9.20 (带有Cauchy型余项的Taylor公式)

若f在$x=x_0$处的某邻域$U(x_0)$上有$n+1$阶连续导函数，则有 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1}$, $\theta \in [0,1]$.

证 考察积分型余项 $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$

由积分第一中值定理得 $\exists \theta \in [0,1]$ s.t. $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n (x-x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1}$

注 对积分型余项应用推广的积分第一中值定理得 $\exists \xi \in [x_0, x]$ s.t. $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$，即为Lagrange型余项.

Theorem 9.21 (Cauchy-Schwarz不等式)

若f,g在$[a,b]$上可积，则 $\left(\int_a^b |f(x)g(x)| dx\right)^2 \le \int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx$

证 令 $F(x) = (tf(x) - g(x))^2$，则 $F(x) \ge 0$

$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b (tf(x) - g(x))^2 = \left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right) t^2 - \left(2\int_a^b f(x)g(x) dx\right) t + \left(\int_a^b (g(x))^2 dx\right)$

$\int_a^b F(x) dx \ge 0 \Rightarrow \Delta = \left(2\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2 - 4\left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2 dx\right) \ge 0$，变形即证

Theorem 9.22 (Riemann-Lebesgue引理)

若f在$[a,b]$上可积，g在$[0,T]$上可积，$g(x+T) = g(x)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)g(nx) dx = \frac{1}{T}\int_a^b f(x) dx \int_0^T g(x) dx$

证 (i) 当 $g(x) \ge 0$ 时

$\forall m \in \mathbb{Z}^+$ s.t. $[a,b] \subseteq [-mT, mT] = [A,B]$

令 $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a,b] \\ 0, & x \in [A,B] \setminus [a,b] \end{cases}$，则 $\int_a^b f(x)g(nx) dx = \int_A^B F(x)g(nx) dx$

令 $T = \{A = x_0, x_1, \dots, x_{2nm} = B\}$, $\Delta x_i = \frac{T}{n}$，则 $\int_A^B F(x)g(nx) dx = \sum\limits_{i=1}^{2nm} \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x)g(nx) dx$

令 $m_k = \inf\limits_{x\in\Delta_i} F(x)$, $M_k = \sup\limits_{x\in\Delta_i} F(x)$

又 $g(x) \ge 0$，由积分第一中值定理得 $\exists \xi_i \in \Delta_i$ s.t. $\int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x)g(nx) dx = F(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(nx) dx = F(\xi_i)\int_0^{\frac{T}{n}} \frac{1}{n} g(nx) d(nx) = \frac{1}{n} F(\xi_i) \int_0^T g(x) dx$

$\Rightarrow \int_A^B F(x)g(nx) dx = \sum\limits_{i=1}^{2nm} \frac{1}{n} F(\xi_i)\int_0^T g(x) dx = \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(x) dx\right) \sum\limits_{i=1}^{2nm} \frac{T}{n} F(\xi_i)$

又 $\sum\limits_{i=1}^{2nm} m_i \cdot \frac{T}{n} \le \sum\limits_{i=1}^{2nm} F(\xi_i) \cdot \frac{T}{n} \le \sum\limits_{i=1}^{2nm} M_i \cdot \frac{T}{n}$，此时左右即为Darboux和，故取极限得 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{2nm} F(\xi_i) \cdot \frac{T}{n} = \int_A^B F(x) dx$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \int_A^B F(x)g(nx) dx = \frac{1}{T}\int_0^T g(x) dx \int_A^B F(x) dx$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)g(nx) dx = \frac{1}{T}\int_a^b f(x) dx \int_0^T g(x) dx$

(ii) 当 $\exists x \in [0,T]$ s.t. $g(x) < 0$ 时

令 $g^+(x) = \begin{cases} g(x), & g(x) \ge 0 \\ 0, & g(x) < 0 \end{cases}$, $g^-(x) = \begin{cases} -g(x), & g(x) \le 0 \\ 0, & g(x) > 0 \end{cases}$，则 $g^+(x), g^-(x) \ge 0$, $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)g(nx) dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)g^+(nx) dx - \lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^b f(x)g^-(nx) dx = \frac{1}{T}\int_a^b f(x) dx \int_0^T g^+(x) dx - \frac{1}{T}\int_a^b f(x) dx \int_0^T g^-(x) dx = \frac{1}{T}\int_a^b f(x) dx \int_0^T g(x) dx$

综上即证

Corollary 9.6

若f在$[a,b]$上可积，则$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,dx=0$

证 令$g(x)=\sin x$，由Riemann-Lebesque引理得$\lim\limits_{n\to+\infty}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_a^b f(x)\,dx\int_0^{2\pi}\sin x=0$

类似可证$\lim\limits_{n\to+\infty}f(x)\cos nx\,dx=0$

Theorem 9.23 (Hadamard不等式)

若f在$[a,b]$上可积，$f''(x)>0$，则$f(\frac{a+b}{2})(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a)$

Corollary 9.7 (Stirling公式)

$n!\sim\sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n,\ n\to+\infty$

Chapter X

Theorem 10.1

由上下两条连续曲线 $y=f_2(x)$, $y=f_1(x)$ 与两条直线 $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ 所围成的平面图形，其面积 $A=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx$.

Theorem 10.2

由参数方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ 所确定的曲线C与直线 $x=a=x(\alpha)$, $x=b=x(\beta)$ 与x轴所围成的平面图形，其面积 $A=\int_\alpha^\beta|y(t)x'(t)|dt$.

Theorem 10.3

由极坐标方程 $r=r(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$ 所确定的曲线C与两条射线 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 所围成的平面图形，其面积 $A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$.

Theorem 10.4

由截面面积函数 $A(x)$, $x\in[a,b]$ 与两平面 $x=a$, $x=b$ 所确定的立体Ω，其体积 $V=\int_a^b A(x)dx$.

Theorem 10.5

设f是 $[a,b]$ 上的连续函数，Ω是由平面图形 $0\le y\le|f(x)|$, $a\le x\le b$ 绕x轴旋转一周所得的旋转体，则 $A(x)=\pi[f(x)]^2$, $x\in[a,b]$. Ω的体积 $V=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx$.

注 若平面图形是由参数方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[a,b]$ 确定的，则旋转体Ω的体积 $V=\pi\int_a^b(y(t))^2d(x(t))$

若平面图形是由极坐标方程 $r=r(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$ 确定的，则可将极坐标方程化为参数方程得 $x=r(\theta)\cos\theta$, $y=r(\theta)\sin(\theta)$ 代入求值.

Defintion 10.1

设 $C=\overset{\frown}{AB}$ 是一条没有自交点的非闭平面曲线，从A到B依次取分点 $A=P_0,P_1,\dots,P_{n-1},P_n=B$ 作为对C的一个分割T. 记 $\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}|P_{i-1}P_i|$, $s_T=\sum\limits_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i|$.

若存在极限 $\lim\limits_{\|T\|\to0}s_T=s$，即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ s.t. 若 $\|T\|<\delta$，则 $|s_T-s|<\varepsilon$. 则称曲线C是可求长的，极限s为曲线C的弧长.

Theorem 10.6

设参数方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微且导函数连续，则由其确定没有自交点的非闭的平面曲线C是可求长的. 弧长 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$.

注 该定理表明曲线可求长的充分条件是 $x(t)$, $y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可导，$x'(t)$, $y'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

Theorem 10.7

对于任一平面曲线 $\overset{\frown}{AB}$，若在 $\overset{\frown}{AB}$ 上任取点 $P_1,P_2,\dots,P_{n-1}$，将 $\overset{\frown}{AB}$ 分成n段可求长的非闭曲线 $\overset{\frown}{AP_1}$, $\overset{\frown}{P_1P_2}$, …, $\overset{\frown}{P_{n-1}B}$，则 $\overset{\frown}{AB}$ 是可求长的，其弧长等于各段弧长之和.

注 $\overset{\frown}{AB}$ 可以有自交点，也可以无自交点.

Definition 10.2

设参数方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微且导函数连续，且 $x'(t)$ 与 $y'(t)$ 不同时为零，则称由其确定的平面曲线C为光滑曲线.

Corollary 10.1

若曲线C由直角坐标方程 $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ 表示，则当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微且导函数连续时，该曲线即为光滑曲线。此时弧长 $s=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

证 将直角坐标方程看作参数方程 $x=x,\ y=f(x)$ 即证

Corollary 10.2

若曲线C由极坐标方程 $r=r(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$ 表示，则当 $r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微且导函数连续，$r(\theta)$ 与 $r'(\theta)$ 不同时为零时，该曲线即为光滑曲线，此时弧长 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}\,d\theta$

证 将极坐标方程化为参数方程得 $x=r(\theta)\cos\theta,\ y=r(\theta)\sin\theta$

$\Rightarrow x'(\theta)=r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta,\ y'(\theta)=r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta$

$\Rightarrow (x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2=(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2$

代入即证

Definition 10.3

考察 $s(t)=\int_\alpha^t\sqrt{(x'(\tau))^2+(y'(\tau))^2}\,d\tau$，即曲线上端点 P_0 到动点 $P(x(t),y(t))$ 的弧长. 则 $\frac{ds}{dt}=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}$，即 $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$. 称 $s(t)$ 的微分 ds 为弧微分，在曲线上点P处的切线直角三角形称作微分三角形.

Definition 10.4

对于由参数方程 $x=x(t),\ y=y(t)$ 确定的光滑曲线C，设 $\alpha(t)$ 表示曲线在点 $P(x(t),y(t))$ 处切线的倾角，$\Delta\alpha=\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)$ 表示动点由 $P(x(t),y(t))$ 沿曲线移至 $Q(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t))$ 时切线倾角的增量，$\overset{\frown}{PQ}$ 弧长为 Δs，则称 $\bar{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ 为 $\overset{\frown}{PQ}$ 的平均曲率.

若存在极限 $K=\lim\limits_{\Delta t\to0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\lim\limits_{\Delta s\to0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$，则称极限K为曲线C在点P处的曲率.

Theorem 10.8

由参数方程 $x=x(t),\ y=y(t)$ 确定的光滑曲线C，其上任一点处曲率 $K=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

证 $\alpha(t)=\arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}$

$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha'(t)}{s'(t)}=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{((x'(t))^2+(y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}$

Corollary 10.3

若曲线C由直角坐标方程 $y=f(x)$ 表示，则其上任一点处曲率 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

证 将直角坐标方程看作参数方程 $x=x,\ y=f(x)$ 即证

Corollary 10.4

若曲线C由极坐标方程 $r=r(\theta)$ 表示，且 $r(\theta)$ 二阶可导，则其上任一点处曲率 $K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$

证 将极坐标方程化为参数方程得 $x=r(\theta)\cos\theta,\ y=r(\theta)\sin(\theta)$，代入即证.

Chapter XI

Definition 11.1（无穷积分）

设f在$[a,+\infty)$上有定义，且在任何有限区间$[a,u]$上可积，若存在极限$J=\lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\,dx$，则称极限$J$为$f$在$[a,+\infty)$上的无穷积分，记作$J=\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$，并称$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$收敛. 若极限不存在，则称$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$发散.

类似地，可定义f在$(-\infty,b]$上的无穷积分$\int_{-\infty}^{b}f(x)\,dx=\lim\limits_{u\to-\infty}\int_u^b f(x)\,dx$.

对于f在$(-\infty,+\infty)$上的无穷积分，定义$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{a}f(x)\,dx+\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$，其中$a$为任一实数. 当且仅当$\int_{-\infty}^{a}f(x)\,dx$与$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$均收敛时，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$收敛.

注 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$的收敛性与$a$的选取无关

换元积分法与分部积分法对无穷积分均适用

Definition 11.2（瑕积分）

设f在$(a,b]$上有定义，在$x=a$处的任一右邻域上无界，在任何闭区间$[u,b]\subseteq(a,b]$上有界且可积. 若存在极限$J=\lim\limits_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\,dx$，则称$x=a$为$f$的瑕点，极限$J$为$f$在$(a,b]$上的瑕积分，并称$\int_a^b f(x)\,dx$收敛. 若极限不存在，则称$\int_a^b f(x)\,dx$发散.

类似地，可定义$x=b$为瑕点，f在$[a,b)$上的瑕积分$\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{u\to b^-}\int_a^u f(x)\,dx$.

对于瑕点$c\in(a,b)$的瑕积分，定义$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$，当且仅当$\int_a^c f(x)\,dx$与$\int_c^b f(x)\,dx$均收敛时，$\int_a^b f(x)\,dx$收敛.

Theorem 11.1（反常积分收敛的Cauchy收敛准则）

无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$收敛的充要条件是$\forall\varepsilon>0,\ \exists G\geq a$ s.t. $\forall u_1,u_2>G,\ \left|\int_a^{u_2}f(x)\,dx-\int_a^{u_1}f(x)\,dx\right|=\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)\,dx\right|<\varepsilon$

瑕积分$\int_a^b f(x)\,dx$（瑕点为a）收敛的充要条件是$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ s.t. $\forall u_1,u_2\in U_+^\circ(a;\delta),\ \left|\int_{u_1}^b f(x)\,dx-\int_{u_2}^b f(x)\,dx\right|=\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)\,dx\right|<\varepsilon$

证 令$F(u)=\int_a^u f(x)\,dx$，则$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx=\lim\limits_{u\to+\infty}F(u)$，故将$F(u)$代入Cauchy收敛准则即证.

Corollary 11.1

无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$收敛的充要条件是$\forall\varepsilon>0,\ \exists G\geq a$ s.t. $\forall u>G,\ \left|\int_u^{+\infty}f(x)\,dx\right|<\varepsilon$

瑕积分$\int_a^b f(x)\,dx$（瑕点为a）收敛的充要条件是$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ s.t. $\forall u\in U_+^\circ(a;\delta),\ \left|\int_a^u f(x)\,dx\right|<\varepsilon$

证 由$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx=\int_a^u f(x)\,dx+\int_u^{+\infty}f(x)\,dx$并结合Cauchy收敛准则即证.

Theorem 11.2

若f在任何有限区间$[a,u]$上可积，且$\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$收敛，则$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$收敛，且$\left|\int_a^{+\infty}f(x)\,dx\right|\leq\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$

若f的瑕点为$x=a$，在任何闭区间$[u,b]\subseteq(a,b]$上可积，且$\int_a^b|f(x)|\,dx$收敛，则$\int_a^b f(x)\,dx$收敛，且$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|\,dx$

证 由Cauchy收敛准则，$\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$收敛 $\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists G\geq a$ s.t. $\forall u_1,u_2>G,\ \left|\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|\,dx\right|=\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|\,dx<\varepsilon$

又由绝对值不等式有$\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)\,dx\right|\leq\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|\,dx<\varepsilon$

由Cauchy收敛准则得$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$收敛

$\left|\int_a^u f(x)\,dx\right|\leq\int_a^u|f(x)|\,dx$，令$u\to+\infty$，即得$\left|\int_a^{+\infty}f(x)\,dx\right|\leq\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$

Definition 11.3（绝对收敛与条件收敛）

当$\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$收敛时，称$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$为绝对收敛. 若$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$收敛但$\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$发散，则称$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$为条件收敛

当$\int_a^b|f(x)|\,dx$收敛时，称$\int_a^b f(x)\,dx$为绝对收敛. 若$\int_a^b f(x)\,dx$收敛但$\int_a^b|f(x)|\,dx$发散，则称$\int_a^b f(x)\,dx$为条件收敛

注 由Theorem 11.2可知，绝对收敛的无穷积分和瑕积分自身也一定收敛，但其逆命题一般不成立.

Theorem 11.3 (比较原则)

设 f,g 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，且在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积，且满足 $0\le f(x)\le g(x)$，$x\in[a,+\infty)$，则当 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；若 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散。

设 f,g 的瑕点均为 $x=a$，且在任何闭区间 $[u,b]\subseteq(a,b]$ 上都可积，且满足 $0\le f(x)\le g(x)$，$x\in[a,b)$，则当 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^b f(x)dx$ 收敛；若 $\int_a^b f(x)dx$ 发散，则 $\int_a^b g(x)dx$ 发散。

证　由 Corollary 11.1 易证.

Corollary 11.2

设 f,g 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，且在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积，且满足 $f(x)\ge 0$，$g(x)>0$，$x\in[a,+\infty)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c$，则

- 当 $0<c<+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 同敛态
- 当 $c=0$ 时，若 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛
- 当 $c=+\infty$ 时，若 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散

设 f,g 的瑕点均为 $x=a$，且在任何闭区间 $[u,b]\subseteq(a,b]$ 上都可积，且满足 $f(x)\ge 0$，$g(x)>0$，$x\in(a,b]$，$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=c$，则

- 当 $0<c<+\infty$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛态
- 当 $c=0$ 时，若 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛
- 当 $c=+\infty$ 时，若 $\int_a^b f(x)dx$ 发散，则 $\int_a^b g(x)dx$ 发散

证　由比较准则易推知.

Corollary 11.3 (Cauchy 判别法)

设 f 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，且在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积，则

- 当 $0\le f(x)\le\frac{1}{x^p}$，$p>1$ 时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛
- 当 $f(x)\ge\frac{1}{x^p}$，$p\le 1$ 时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散

设 f 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积，且 $f(x)\ge 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)=\lambda$，则

- 当 $p>1$，$0\le\lambda<+\infty$ 时，$\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛
- 当 $p\le 1$，$0<\lambda\le+\infty$ 时，$\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 发散

设 f 的瑕点为 $x=a$，且在任何闭区间 $[u,b]\subseteq(a,b]$ 上都可积，则

- 当 $0\le f(x)\le\frac{1}{(x-a)^p}$，$0<p<1$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 收敛
- 当 $f(x)\ge\frac{1}{(x-a)^p}$，$p\ge 1$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 发散

设 f 的瑕点为 $x=a$，且在任何闭区间 $[u,b]\subseteq(a,b]$ 上都可积，且 $f(x)\ge 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-a)^pf(x)=\lambda$，则

- 当 $0<p<1$，$0\le\lambda<+\infty$ 时，$\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛
- 当 $p\ge 1$，$0<\lambda\le+\infty$ 时，$\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 发散

证　由比较准则易推知.

Theorem 11.4 (Dirichlet 判别法)

若 $F(u)=\int_a^u f(x)dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 收敛.

设 f 的瑕点为 $x=a$，若 $F(u)=\int_a^u f(x)dx$ 在 $[a,b)$ 上有界，$g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=0$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 收敛.

证　由条件设 $\left|\int_a^u f(x)dx\right|\le M$，$u\in[a,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists G\ge a\ s.t.\ \forall x>G,\ |g(x)|<\frac{\varepsilon}{4M}$

由积分第二中值定理得 $\forall u_2>u_1>G$，$\exists\xi\in(u_1,u_2)\ s.t.\ \int_{u_1}^{u_2}f(x)g(x)dx=g(u_1)\int_{u_1}^{\xi}f(x)dx+g(u_2)\int_{\xi}^{u_2}f(x)dx$

$\Rightarrow\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)g(x)dx\right|\le|g(u_1)|\left|\int_{u_1}^{\xi}f(x)dx\right|+|g(u_2)|\left|\int_{\xi}^{u_2}f(x)dx\right|=|g(u_1)|\left|\int_a^{\xi}f(x)dx-\int_a^{u_1}f(x)dx\right|+|g(u_2)|\left|\int_a^{u_2}f(x)dx-\int_a^{\xi}f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M+\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M=\varepsilon$

由 Cauchy 收敛准则得 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)$ 收敛

Theorem 11.5 (Abel判别法)

若$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，$g(x)$在$[a,+\infty)$上单调有界，则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛.

设f的瑕点为$x=a$，若$\int_a^{b} f(x)dx$收敛，$g(x)$在$(a,b]$上单调有界，则$\int_a^{b} f(x)g(x)dx$收敛.

证 $g(x)$单调有界 $\Rightarrow$ 当$x\to+\infty$时，$g(x)$收敛，设$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=A$，$h(x)=g(x)-A$，则$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$

$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx=\int_a^{+\infty} f(x)(h(x)+A)dx=\int_a^{+\infty} f(x)h(x)dx+A\int_a^{+\infty} f(x)dx$

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛 $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$有界，$A\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛 $\Rightarrow$ 由Dirichlet判别法得$\int_a^{+\infty} f(x)h(x)dx$收敛

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛