Chapter XXII - Coulomb's Law and Electric Field

散度与旋度

$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$, $F=(F_x,F_y,F_z)$

- 散度：$\nabla\cdot F=\frac{\partial}{\partial x}F_x+\frac{\partial}{\partial y}F_y+\frac{\partial}{\partial z}F_z$
- 旋度：$\nabla\times F=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z},\ \frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x},\ \frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$

电荷

$e=1.602\times10^{-19}C$

$q=Ne$, $N=\pm1,\pm2,\dots$

在孤立系统中总电荷量不变

Coulomb 定律

$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{r}$ $\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\ F\cdot m^{-1}$：真空介电常数

- Coulomb定律对运动的源电荷不适用！

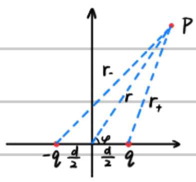
电场

静止点电荷的电场强度：$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

静电场是有源场

静电场具有无旋性 ⇒ 电场线不闭合、不相交

电偶极子



电偶极距：$\vec{p}=q\vec{d}$，从负电荷指向正电荷

$\vec{E}_p=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\vec{p}+3\frac{\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{p})}{r^2}\right)$

证 $\vec{r}_\pm=(r\cos\varphi\mp\frac{d}{2})\vec{i}+r\sin\varphi\,\vec{j}\Rightarrow r_\pm^2=(r\cos\varphi\mp\frac{d}{2})^2+(r\sin\varphi)^2\approx r^2\mp rd\cos\varphi$ $(d\ll r)$

$\vec{E}_p=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q\vec{r}_+}{r_+^3}+\frac{(-q)\vec{r}_-}{r_-^3}\right]\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(r\cos\varphi-\frac{d}{2})\vec{i}+r\sin\varphi\vec{j}}{(r^2-rd\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}-\frac{(r\cos\varphi+\frac{d}{2})\vec{i}+r\sin\varphi\vec{j}}{(r^2+r\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}\right]$

$\frac{1}{(r^2\mp rd\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{r^3}(1\mp\frac{d}{r}\cos\varphi)^{-\frac{3}{2}}\approx\frac{1}{r^3}(1\pm\frac{3}{2}\frac{d}{r}\cos\varphi)$ $((1+x)^n\approx1+nx,\ x\to0)$

$\vec{E}_p\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^3}\left[-d\vec{i}+\frac{3d}{r}\cos\varphi(r\cos\varphi\vec{i}+r\sin\varphi\vec{j})\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0r^3}\left[-qd\vec{i}+3\cdot\frac{rq\vec{d}\cos\varphi}{r^2}(r\cos\varphi\vec{i}+r\sin\varphi\vec{j})\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0r^3}\left(-\vec{p}+3\frac{\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{p})}{r^2}\right)$

x轴上：$\vec{E}_p=\frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0r^3}$

y轴上：$\vec{E}_p=-\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0r^3}$

连续带电体

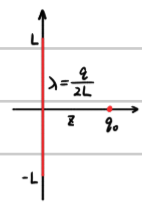
电荷线密度：$\lambda=\frac{dq}{dx}$

电荷面密度：$\sigma=\frac{dq}{dA}$

电荷体密度：$\rho=\frac{dq}{dV}$

$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}$

均匀带电棒



$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z(L^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\hat{k}$

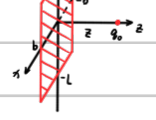
证 $\vec{E}=\int_{-L}^{L}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dq}{\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{z\hat{k}-y\hat{j}}{y^2+z^2}=\frac{z}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{\lambda dy}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\hat{k}=\frac{\lambda z\hat{k}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{dy}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$=\frac{\lambda z\hat{k}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{y}{z(y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\Big|_{-L}^{L}=\frac{\lambda z\hat{k}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2L}{z(L^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z(L^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\hat{k}$

当 $z\gg L$ 时，$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z^2}\hat{k}$ （退化为点电荷）

当 $z\ll L$ 时，$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{zL}\hat{k}$

均匀带电平面



$\vec{E}=\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\arctan\frac{b}{z}\cdot\hat{k}$, $L\gg z$

证 $\vec{E}=\int_{-b}^{b}\frac{\sigma\cdot2Ldx}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{(x^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(L^2+x^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{z\hat{k}-x\hat{i}}{(x^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$

$\approx\frac{\sigma z}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-b}^{b}\frac{dx}{x^2+z^2}\hat{k}$ $(L\gg z)$

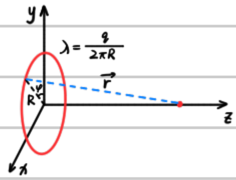
$= \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\arctan\frac{b}{z}\cdot\hat{k}$

当 b>>z 时，$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$ （无限大的带电平板产生匀强电场）

电场幂律

$E\propto\frac{1}{r^{2-n}}$ n: 均匀带电体的维度

均匀带电圆环



$\vec E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qz}{(R^2+z^2)^{\frac32}}\cdot\hat k$

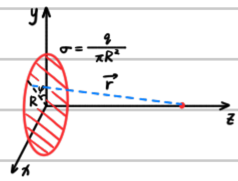
证：$\vec E=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dq}{R^2+z^2}\cdot\frac{z\hat k - R\sin\varphi\,\hat i - R\cos\varphi\,\hat j}{(R^2+z^2)^{\frac12}}$

$=\frac{z}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda R\,d\varphi}{(R^2+z^2)^{\frac32}}\hat k$

$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qz}{(R^2+z^2)^{\frac32}}\hat k$

当 z>>R 时，$\vec E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{z^2}\hat k$ （退化为点电荷）

均匀带电圆平面



$\vec E=\frac{q}{2\pi R^2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac12}}\right)\hat k$

证：$\vec E=\int_0^R\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(2\pi r\,dr)\sigma\cdot z}{(r^2+z^2)^{\frac32}}\hat k$

$=\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{\frac32}}\hat k$

$=\frac{q}{2\pi R^2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac12}}\right)\hat k$

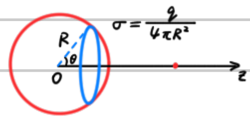
当 z>>R 时，$\vec E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\hat k$ （退化为点电荷）

证：$\frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac12}}=\left[1+\left(\frac{R}{z}\right)^2\right]^{-\frac12}\approx 1-\frac12\left(\frac Rz\right)^2$ (z>>R)

代入即证

当 R>>z 时，$\vec E=\frac{q}{2\pi R^2\varepsilon_0}\hat k$ （无限大的带电平板产生匀强电场）

均匀带电球壳

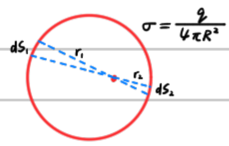


当 z>R 时，$\vec E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{z^2}\hat k$ （等效于球心处点电荷）

证：$\vec E=\int_0^{\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(2\pi R\sin\theta\,R\,d\theta)\sigma(z-R\cos\theta)}{(R\sin\theta)^2+(z-R\cos\theta)^2}\hat k$

$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{z^2}\hat k$

当 z<R 时，$E=0$



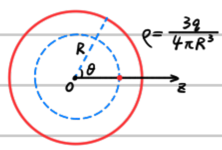
证：$dE_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS_1}{r_1^2}$，$dE_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS_2}{r_2^2}$

$d\Omega_1=\frac{dS_1}{r_1^2}\cos\theta_1$，$d\Omega_2=\frac{dS_2}{r_2^2}\cos\theta_2$

$\frac{dS_1}{r_1^2}=\frac{dS_2}{r_2^2}$，$\theta_1=\theta_2\Rightarrow dE_1=dE_2$

$\Rightarrow E=\int_{shell}dE=0$

均匀带电球



当 z<R 时，$\vec E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qz}{R^3}\cdot\hat k$

证 $q'=q\cdot\left(\frac zR\right)^3$

$\vec E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q'}{z^2}\hat k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qz}{R^3}\cdot\hat k$

当 z>R 时，$\vec E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{z^2}\cdot\hat k$

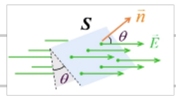
Chapter XXIII - Gauss' Law

电场线

$|\vec{E}| = E = \frac{dN}{dS_{\perp}}$

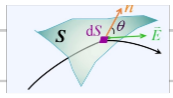
电通量

- 均匀电场，S法线方向与电场强度方向成θ角



$\Phi_e = ES\cos\theta = \vec{E}\cdot\vec{S}$

- 电场不均匀，S为任意曲面



$\Phi_e = \iint_S d\Phi_e = \iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_S E\cos\theta\, dS$

Gauss 定律

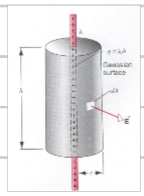
真空中的任何静电场中，穿过任一闭合曲面的电通量，在数值上等于该闭合曲面（称作高斯面）内包围的电量的代数和与$\frac{1}{\varepsilon_0}$之积.

$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{\text{inside}} q \Leftrightarrow \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$，这表明静电场是有源场

- $\vec{E}$是空间所有电荷（不止内部电荷）产生的电场强度

无限长均匀带电棒

$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$



证 $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_{S_侧} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \oint_{S_上} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \oint_{S_下} \vec{E}\cdot d\vec{S}$

$= \oint_{S_侧} \vec{E}\cdot d\vec{S} + 0 + 0$ （棒无限长，故上下面可看作棒轴对称）

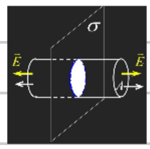
$= E\cdot 2\pi r h$

$= \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$ （Gauss 定律）

$\Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

无限大均匀带电平面

$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$



证 $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_{S_侧} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \oint_{S_左} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \oint_{S_右} \vec{E}\cdot d\vec{S}$

$= \oint_{S_左} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \oint_{S_右} \vec{E}\cdot d\vec{S}$ （对称性）

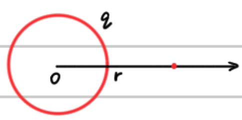
$= 2ES$

$= \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$ （Gauss 定律）

$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

均匀带电球壳

$E(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r>R \\ 0, & r<R \end{cases}$



证 $4\pi r^2 E = \begin{cases} \frac{q}{\varepsilon_0}, & r>R \\ 0, & r<R \end{cases}$

$\Rightarrow E = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r>R \\ 0, & r<R \end{cases}$

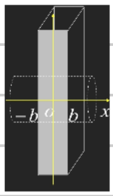
均匀带电球

$E(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r>R \\ \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, & r<R \end{cases}$

证 $4\pi r^2 E = \frac{qr^3}{\varepsilon_0 R^3}$, $r<R$

$\Rightarrow E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$, $r<R$

无限大非均匀带电薄板



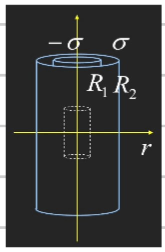
$\rho=\rho_0|x|$

$$E(x)=\begin{cases}\dfrac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0}, & x<b\\[2mm] \dfrac{\rho_0 b^2}{2\varepsilon_0}, & x>b\end{cases}$$

证: $$2EA=\begin{cases}\dfrac{2A\int_0^x \rho_0 x\,dx}{\varepsilon_0}, & x<b\\[2mm] \dfrac{2A\int_0^b \rho_0 x\,dx}{\varepsilon_0}, & x>b\end{cases}$$

$$\Rightarrow E(x)=\begin{cases}\dfrac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0}, & x<b\\[2mm] \dfrac{\rho_0 b^2}{2\varepsilon_0}, & x>b\end{cases}$$

无限长均匀带电同心圆柱壳



$$E=\begin{cases}0, & r<R_1\\[2mm] \dfrac{-\sigma R_1}{\varepsilon_0 r}, & R_1<r<R_2\\[2mm] \dfrac{\sigma(R_2-R_1)}{\varepsilon_0 r}, & r>R_2\end{cases}$$

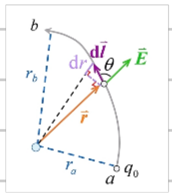
证: 当 $R_1<r<R_2$ 时, $2\pi rhE=\dfrac{2\pi R_1 h(-\sigma)}{\varepsilon_0}\Rightarrow E=\dfrac{-\sigma R_1}{\varepsilon_0 r}$

当 $r>R_2$ 时, $2\pi rhE=\dfrac{2\pi R_2 h\sigma-2\pi R_1 h\sigma}{\varepsilon_0}\Rightarrow E=\dfrac{\sigma(R_2-R_1)}{\varepsilon_0 r}$

Chapter XXIV - Electric Potential

点电荷电场做功

$W=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b})$ 表明W只和q_0的始末位置有关，与路径无关⇒电场力是保守力



证 $dW=\vec{F}\cdot d\vec{l}=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\cdot d\vec{l}$

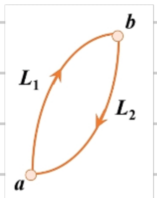
$\vec{r}\cdot d\vec{l}=r\,dl\cos\theta=r\,dr$

$dW=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$

$W=\int dW=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2}=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b})$

静电场环流定理

$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=0\Leftrightarrow\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$，即电场是无旋场



证 $W=\oint q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}=q_0(\int_a^b\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_b^a\vec{E}\cdot d\vec{l})=0$

电势能与电势

- 电势能：$\Delta U=U_a-U_\infty=-W_{\infty a}=\int_a^\infty q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 从一点移动到零势能点所做的功
- 电势：$\Delta V=\frac{\Delta U}{q_0}=\int_a^\infty\vec{E}\cdot d\vec{l}=V_a-V_\infty=V_a$ $V_\infty=0$

电势的计算

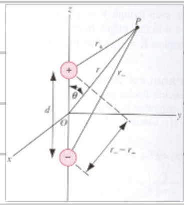
- 已知电荷分布，根据电势叠加原理：$V=\int dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_Q\frac{dq}{r}$
- 已知场强分布，根据电势定义：$V_P=\int_P^\infty\vec{E}\cdot d\vec{l}$

电荷系统的电势能

$U=\frac{1}{2}\sum_i q_iV_i=\frac{1}{2}\int_Q V\,dq$ $(n\to+\infty)$

电偶极子产生的电势

$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qd\cos\theta}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p\cos\theta}{r}$



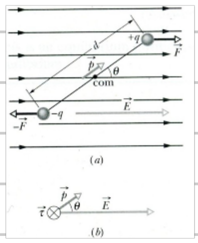
证 $V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{q}{r_+}+\frac{-q}{r_-})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r_--r_+}{r_+r_-}$

$r_--r_+\approx d\cos\theta$，$r_+r_-\approx r^2$ $(d\gg r)$

$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qd\cos\theta}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p\cos\theta}{r^2}$

匀强电场中电偶极子的力矩和电势能

- $\vec{\tau}=\vec{p}\times\vec{E}$
- $U=-\vec{p}\cdot\vec{E}$



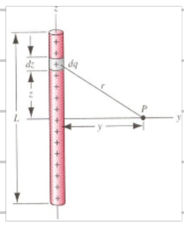
证 $\vec{\tau}=\vec{\tau}_++\vec{\tau}_-=2\vec{r}\times\vec{F}=2\vec{r}\times q\vec{E}=2(q\vec{r})\times\vec{E}=(q\vec{d})\times\vec{E}=\vec{p}\times\vec{E}$

$W=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\vec{\tau}\cdot d\vec{\theta}=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}pE\sin\theta\,d\theta=pE\cos\theta=\vec{p}\cdot\vec{E}$ $\theta=\frac{\pi}{2}$时电偶极子电势能为零

$U=-W=-\vec{p}\cdot\vec{E}$

均匀带电棒产生的电势

$V=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\frac{L}{2}+\sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}}{-\frac{L}{2}+\sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}}$



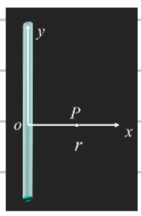
证1 $V=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda dz}{\sqrt{y^2+z^2}}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\frac{L}{2}+\sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}}{-\frac{L}{2}+\sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}}$

证2 $E_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda L}{y\sqrt{y^2+\frac{L^2}{4}}}$

$V=\int_y^\infty E_y\,dy=\int_y^\infty\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda L}{y\sqrt{y^2+\frac{L^2}{4}}}dy=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\frac{L}{2}+\sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}}{-\frac{L}{2}+\sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}}$

无限长均匀带电棒产生的电势

$V=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r+C$ （C取决于零电势处）



证 $E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

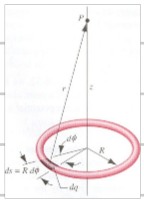
$V=\int_P^{P_0}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{r_0}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_0=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r+C$ （任取P_0为非无限远点）

均匀带电圆环产生的电势

$V=\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$

证1 $dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\,d\varphi}{\sqrt{R^2+z^2}}$

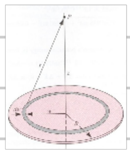
$V=\int dV=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\,d\varphi}{\sqrt{R^2+z^2}}=\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$



证2 $\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qz}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$

$V=\int_z^{\infty}\vec{E}\cdot dz=\int_z^{\infty}\frac{qz\,dz}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$

均匀带电圆盘产生的电势



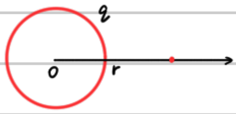
$V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+z^2}-z)$

证: $dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{w^2+z^2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi w\,dw}{\sqrt{w^2+z^2}}$

$V=\int dV=\int_0^R\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi w\,dw}{\sqrt{w^2+z^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+z^2}-z)$

均匀带电球壳产生的电势

$$V=\begin{cases}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}, & r<R\\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r>R\end{cases}$$



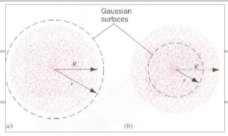
证 $E=\begin{cases}0, & r<R\\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r>R\end{cases}$

当$r<R$时, $V=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^R 0\cdot dr+\int_R^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

当$r>R$时, $V=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

均匀带电球产生的电势

$$V=\begin{cases}\frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{R}-\frac{r^2}{R^3}\right), & r<R\\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}, & r>R\end{cases}$$



证 $E=\begin{cases}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r>R\\ \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, & r<R\end{cases}$

当$r<R$时, $V=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^R\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr+\int_R^{\infty}\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}dr=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{R}-\frac{r^2}{R^3}\right)$

当$r>R$时, $V=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^{\infty}\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}dr=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$

等势面

电势处处相等的面称作等势面.

等势面总与电场线垂直.

等势面和电场的关系

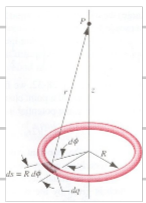
$\vec{E}=\mathrm{grad}\,V=-\frac{dV}{dn}\vec{n}=-\nabla V=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i},\frac{\partial V}{\partial y}\hat{j},\frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$

· 柱坐标: $\vec{E}=-\nabla V=-\left(\frac{\partial V}{\partial r}\hat{u}_r,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\hat{u}_\varphi,\frac{\partial V}{\partial z}\hat{u}_z\right)$

· 球坐标: $\vec{E}=-\nabla V=-\left(\frac{\partial V}{\partial r}\hat{u}_r,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{u}_\theta,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\hat{u}_\varphi\right)$

均匀带电圆环的电场强度

$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qz}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{u}_z$



证: $V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{R^2+z^2}}$

$\vec{E}=-\frac{\partial V}{\partial z}\hat{u}_z=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\hat{u}_z=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qz}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{u}_z$

Chapter XXV — Conductors

静电平衡

静电平衡：$\vec{E}=\vec{E_0}+\vec{E'}$　$\vec{E_0}$：原场，$\vec{E'}$：感应场

•条件：导体内部任何一点处的电场强度为零；导体表面处的电场强度的方向都与导体表面垂直

•推论：导体是等势体，导体表面是等势面

导体表面的场强

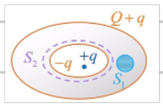
•$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$　E：导体表面电场强度，σ：表面电荷面密度

证：$E(\Delta S)=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\sigma(\Delta S)}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

•$\sigma\propto\frac{1}{r}$　r：曲率半径

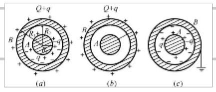
静电屏蔽

•当空腔内有电荷 $+q$ 时，内表面因静电感应出现等值异号的电荷 $-q$，外表面有感应电荷 $+q$



静电屏蔽的常见模型

(a) $V_A=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_1}-\frac{q}{R_2}+\frac{Q+q}{R_3}\right)$，$V_B=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$



证：$E=\begin{cases}0, & 0<r<R_1,\ R_2<r<R_3\\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & R_1<r<R_2\\ \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r>R_3\end{cases}$

$V_A=\int_{R_1}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr+\int_{R_3}^{\infty}\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_1}-\frac{q}{R_2}+\frac{Q+q}{R_3}\right)$

$V_B=\int_{R_3}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_{R_3}^{\infty}\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$

(b) $V_A=V_B=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$

证：$E=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，$r>R_3$

$V_A=V_B=\int_{R_3}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_{R_3}^{\infty}\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$

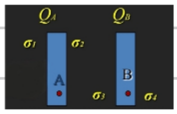
(c) $V_A=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$，$V_B=0$

证：$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，$R_1<r<R_2$

$V_A=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$

平行板电荷面密度

$\sigma_1=\sigma_4=\frac{Q_A+Q_B}{2S}$，$\sigma_2=\sigma_3=\frac{Q_A-Q_B}{2S}$



证：$Q_A=\sigma_1 S+\sigma_2 S$

$Q_B=\sigma_3 S+\sigma_4 S$

$E_A=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0$　利用静电平衡性质，取电场强度为0的点，考察四个表面对其电场的叠加

$E_B=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0$

联立解得 $\sigma_1=\sigma_4=\frac{Q_A+Q_B}{2S}$，$\sigma_2=\sigma_3=\frac{Q_A-Q_B}{2S}$

Chapter XXVI — Capacitors and Capacitance

孤立导体的电容

$C=\frac{q}{V}$

电容器

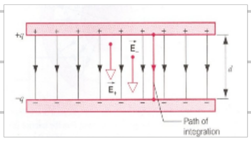
$C=\frac{q}{\Delta V}$

电容器电容的一般计算方法

- 假设两极板分别带电 $+q$, $-q$
- 计算两极板间的电场强度
- 利用公式 $\Delta V=V_+-V_-=\int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{s}$ 计算电势差
- 利用公式 $C=\frac{q}{\Delta V}$ 计算电容

平行板电容器

$C=\frac{\varepsilon_0 A}{d}$



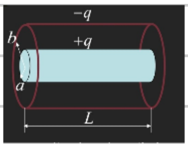
证 $E=E_+ + E_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{q}{\varepsilon_0 A}$

$\Delta V = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_0 A}$

$C=\frac{q}{\Delta V}=\frac{\varepsilon_0 A}{d}$

同心圆柱筒电容器

$C=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{b}{a}}$ $(L\gg a,b)$



证 $\vec{E}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\cdot\frac{\hat{r}}{r}$

$\Delta V=\int_+^-\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_a^b \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\,dr=\frac{q\ln\frac{b}{a}}{2\pi\varepsilon_0 L}$

$C=\frac{q}{\Delta V}=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{b}{a}}$

同心球壳电容器

$C=\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$

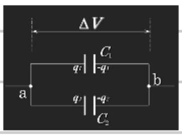
证 $\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\cdot\frac{\hat{r}}{r}$, $a<r<b$

$\Delta V=\int_+^-\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_a^b\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$

$C=\frac{q}{\Delta V}=\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$

电容器的并联、串联

- 并联：$C=\sum_i C_i$

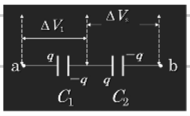


证 $q_1=C_1(\Delta V)$, $q_2=C_2(\Delta V)$

$q_1+q_2=(C_1+C_2)\Delta V=C(\Delta V)$

$\Rightarrow C=C_1+C_2$

- 串联：$\frac{1}{C}=\sum_i\frac{1}{C_i}$

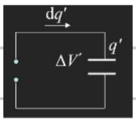


证 $\frac{q}{C_1}+\frac{q}{C_2}=\Delta V_1+\Delta V_2=\Delta V=\frac{q}{C}$

$\Rightarrow \frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$

电容器存储的能量

$U=\frac{1}{2}C(\Delta V)^2=\frac{1}{2}q(\Delta V)=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$



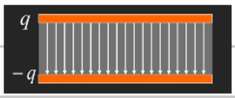
证 $\Delta V'=\frac{q'}{C}$

$dU=dq'(\Delta V')=\frac{q'dq'}{C}$

$U=\int_0^U dU=\int_0^q\frac{q'dq'}{C}=\frac{q^2}{2C}=\frac{1}{2}C(\Delta V)^2=\frac{1}{2}q(\Delta V)$

均强电场的能量密度

$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$



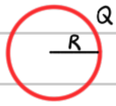
证 $C=\frac{\varepsilon_0 A}{d}$

$E=\frac{q}{\varepsilon_0 A}$

$U=\frac{q^2}{2C}=\frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 A}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Ad=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\Omega$

$u=\frac{U}{\Omega}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

带电导体球壳具有的能量

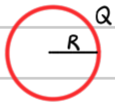


$U=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

证 $V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$U=\frac{1}{2}\int_0^Q V dq=\frac{1}{2}\int_0^Q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}dq=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

带电导体球具有的能量



$U=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

证1 $V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ 计算电势后利用 $U=\frac{1}{2}\sum q_i V_i$

$U=\frac{1}{2}\int_0^Q V dq=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

证2 $U=\int_0^Q\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}dq=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$ 不断从无穷远处向导体上转移电荷，对做功积分

证3 $C=\frac{Q}{V}=4\pi\varepsilon_0 R$ 视作电容

$U=\frac{Q^2}{2C}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

证4 $E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，$r>R$ 利用能量密度

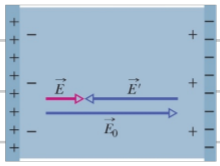
$U=\int u d\Omega=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int E^2 d\Omega=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_R^\infty\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

电场唯一性定理

在一个空间内，导体的带电量或电势给定以后，空间电场分布恒定、唯一。具体来说，边界条件可以是：

- 各导体电势
- 各导体电量
- 部分导体电量与部分导体电势之混合

极化



- 无极分子：位移极化
- 有极分子：取向极化

$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$

相对介电常数

$K_e(\varepsilon_r)$：描述电介质对电场大小的影响

$E=\frac{1}{K_e}E_0$，$K_e\geqslant 1$

常见介质的相对介电常数：

Material	Dielectric Constant κ_e	Dielectric Strength (kV/mm)
Vacuum	1 (exact)	∞
Air (1 atm)	1.00059	3
Polystyrene	2.6	24
Paper	3.5	16
Transformer oil	4.5	12
Pyrex	4.7	14
Mica	5.4	160
Porcelain	6.5	4
Silicon	12	
Water (25°C)	78.5	
Water (20°C)	80.4	
Titania ceramic	130	
Strontium titanate	310	8

[a] Measured at room temperature.

$K_e=1+\chi_e$ χ_e：电极化率

$\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}$ $\vec{P}$：极化强度

极化导体的相关定理

- 静电场环流定理：$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$
- Gauss定律：$\oint\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\sum q_0+\sum q')$

  $\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_0$ $\vec{D}$：电位移矢量，$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon\vec{E}$
- 能量密度：$u=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$ ε：绝对介电常数，$\varepsilon=\varepsilon_0 K_e$

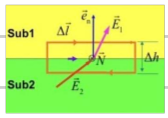
• 电场: $E=\frac{E_0}{K_e}$

• 电容: $C=K_eC_0$

• 电荷面密度: $\sigma'=\vec{P}\cdot\vec{n}$

边界条件

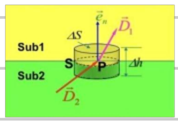
• $\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1}=\frac{D_{2t}}{\varepsilon_2} \Leftrightarrow E_{1t}=E_{2t}$　　切向电场强度连续



证　在边界处取回路，有 $\Delta h\to 0$，由静电场环流定理得:

$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=\vec{E_1}\cdot\Delta l+\vec{E_2}\cdot(-\Delta l)=(E_{1t}-E_{2t})(\Delta l)=0$

• $D_{1n}=D_{2n}\Leftrightarrow \varepsilon_1E_{1n}=\varepsilon_2E_{2n}$　法向电位移矢量连续



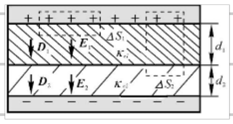
证　在边界处取圆柱面，有 $\Delta h\to 0$，由Gauss定律得

$\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=q\Rightarrow(\vec{D_1}-\vec{D_2})\cdot\vec{e_n}(\Delta S)=\rho_s(\Delta S)\Rightarrow D_{1n}-D_{2n}=\rho_s$

当边界面无自由电荷时，$\rho_s=0\Rightarrow D_{1n}=D_{2n}$

多介质电容器的电容与边界面电场密度

• $C=\frac{\varepsilon_0K_{e1}K_{e2}S}{K_{e2}d_1+K_{e1}d_2}$



• $\sigma'=\frac{K_{e1}-K_{e2}}{K_{e1}K_{e2}}\frac{q}{S}$

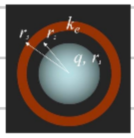
证　$D_1=D_2=\sigma=\frac{q}{S}\Rightarrow E_1=\frac{q}{\varepsilon_0K_{e1}S}$, $E_2=\frac{q}{\varepsilon_0K_{e2}S}$

$\Delta V=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}=E_1d_1+E_2d_2=\frac{q}{\varepsilon_0S}(\frac{d_1}{K_{e1}}+\frac{d_2}{K_{e2}})$

$C=\frac{q}{\Delta V}=\frac{\varepsilon_0K_{e1}K_{e2}S}{K_{e2}d_1+K_{e1}d_2}$

$\sigma'=\sigma_1'+\sigma_2'=\vec{P_1}\cdot\vec{n}+\vec{P_2}\cdot\vec{n}=P_1-P_2=(K_{e1}-1)\varepsilon_0E_1-(K_{e2}-1)\varepsilon_0E_2=\frac{K_{e1}-K_{e2}}{K_{e1}K_{e2}}\frac{q}{S}$

电介质同心球



• $E(r)=\begin{cases}0, & r<r_1\\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}, & r_1<r<r_2\\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0K_er^2}=\frac{q-q'}{4\pi\varepsilon_0r^2}, & r_2<r<r_3\\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}, & r>r_3\end{cases}$, $V(r)=\begin{cases}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{K_er_2}-\frac{1}{K_er_3}+\frac{1}{r_3}), & r<r_1\\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{K_er_2}-\frac{1}{K_er_3}+\frac{1}{r_3}), & r_1<r<r_2\\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r}-\frac{1}{K_er_3}+\frac{1}{r_3}), & r_2<r<r_3\\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}, & r>r_3\end{cases}$

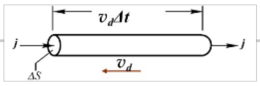
• $\sigma_1=\frac{q}{4\pi r_1^2}$, $\sigma_2=(\frac{1}{K_e}-1)\frac{q}{4\pi r_2^2}$, $\sigma_3=(1-\frac{1}{K_e})\frac{q}{4\pi r_3^2}$

Chapter XXVII — Ohm's Law

恒定电流

- 电流：$i=\frac{dq}{dt}$
- 电流密度：$j=\frac{di}{dS_\perp}=\frac{dq}{dt\,dS_\perp}$

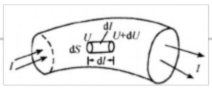
漂移速度



当单位体积的电子数量为 n，电子的漂移速度为 v_d 时：

- $i=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{v_d(\Delta t)(\Delta S)ne}{\Delta t}=env_d(\Delta S)$
- $j=\frac{i}{\Delta S}=env_d$

Ohm 定律



- $i=\frac{V}{R}$
- $j=\frac{1}{\rho}E=\sigma E$　　ρ：电阻率，σ：电导率　　（Ohm 定律的微观形式）
- $w=\sigma E^2$　　w：发热功率　　（Joule 定律的微观形式）

证　$dI=\frac{U-(U+dU)}{dR}=-\frac{dU}{dR}$

$dI=J\,dS$

$dR=\rho\frac{dl}{dS}$

$\Rightarrow J\,dS=-\frac{1}{\rho}\frac{dU}{dl}dS$

$\Rightarrow J=-\frac{1}{\rho}\frac{dU}{dl}$

$E=-\frac{dU}{dl}$

$\Rightarrow J=\frac{1}{\rho}E=\sigma E$

Drude 模型

- $\tau=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i$　　τ：平均自由时间（所有电子在两次碰撞之间的平均时间）
- $J=\frac{ne^2\tau}{m}E$
- $\sigma=\frac{ne^2\tau}{m}$

Maxwell 分布律视角

- $\tau=\frac{\lambda}{\bar{v}}=\lambda\sqrt{\frac{\pi m}{8kT}}\propto\frac{1}{\sqrt{T}}$
- $\sigma\propto\frac{1}{\sqrt{T}}$，$\rho\propto\sqrt{T}$

Chapter XXVIII — Circuit Theory

电动势

$$\varepsilon=\frac{\Delta W_{-\to+}}{q}=\frac{dW}{dq}$$

Kirchhoff 第一定律

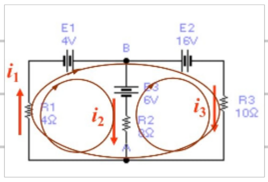
$$I_{in}=\sum_{out}I_i$$

Kirchhoff 第二定律

$$\sum_{loop}\varepsilon_k-\sum_{loop}iR_k=0$$

多环路电路

$i_1=\frac{58}{76}A$, $i_2=\frac{10}{76}A$, $i_3=\frac{68}{76}A$



解 $i_1=i_2+i_3$　　亦可写作矩阵形式 $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\R_1&R_2&0\\0&R_2&-R_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1\\i_2\\i_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\varepsilon_1-\varepsilon_3\\\varepsilon_2-\varepsilon_3\end{pmatrix}$

$-i_1R_1+\varepsilon_1-\varepsilon_3-i_2R_2=0$

$i_2R_2+\varepsilon_3-\varepsilon_2-i_3R_3=0$

联立求解即得

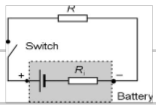
稳恒电流

$$\oint_S\vec{j}\cdot d\vec{S}=\oint_S\sigma\vec{E}\cdot d\vec{S}=0$$

证 $\oint_S\vec{j}\cdot d\vec{S}=-\frac{dq}{dt}$

对稳恒电流，$\frac{dq}{dt}=0$，即证

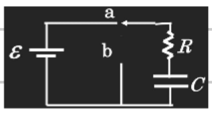
电路中的能量转换

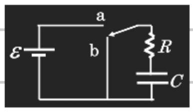


- $P_{battery}=\varepsilon i-i^2r$
- $P_R=i^2R=i(\Delta V)$

RC电路（电容器的充放电）

$\tau=RC$　　τ：时间常数





- 充电

$i(t)=\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$, $q(t)=C\varepsilon(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$, $V_c(t)=\varepsilon(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$

证 $\Delta V_c=\frac{q(t)}{C}$, $\Delta V_R=i(t)R$

$\varepsilon-\Delta V_c-\Delta V_R=0$

$i=\frac{dq}{dt}$

联立求解即得

- 放电

$i(t)=\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$, $q(t)=q_0e^{-\frac{t}{\tau}}$

证 $\Delta V_c=\frac{q(t)}{C}$, $\Delta V_R=i(t)R$

$\Delta V_c-\Delta V_R=0$

$i=-\frac{dq}{dt}$

联立求解即得

Chapter XXIX — Magnetic Force

磁场的性质

- $\nabla\cdot\vec{B}=0 \Leftrightarrow \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$　磁场散度为零 ⇔ 磁场为无源场
- 磁力线闭合　磁场旋度不为零 ⇔ 磁场为有旋场

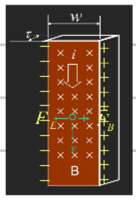
磁场

$B=\frac{F_{B\,max}}{|q|v}$，方向为 $F_B=0$ 的运动方向　（利用 Lorentz 力定义）

Lorentz 力

$\vec{F}_B=q\vec{v}\times\vec{B}$

Hall 效应



- Hall 电压：$\Delta V_H=\frac{1}{nq}\frac{iB}{\tau}$　　$\frac{1}{nq}$：Hall 系数
- 电荷密度：$n=\frac{iB}{q\tau\Delta V_H}$

证 $\vec{F}_B=q\vec{v}\times\vec{B}$，$\vec{F}_E=q\vec{E}$

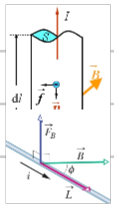
$\vec{F}_B=\vec{F}_E$

$\Delta V_H=wE$

$i=qnw\tau v$

联立解得 $\Delta V_H=\frac{1}{nq}\frac{iB}{\tau}$

Ampere 力



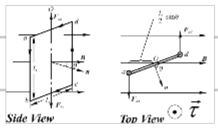
$\vec{F}_B=\int i\,d\vec{\ell}\times\vec{B}$

证 $d\vec{F}_B=Nd\vec{f}_B=-Ne\vec{v}_d\times\vec{B}=-nSd\ell e\vec{v}_d\times\vec{B}$

$i=-nSv_de \Rightarrow d\vec{F}_B=i\,d\vec{\ell}\times\vec{B}$

- 恒定磁场中的直导线：$\vec{F}_B=iB\ell\sin\theta$

电流环路



- 力矩：$\tau=iA\hat{n}\times\vec{B}$

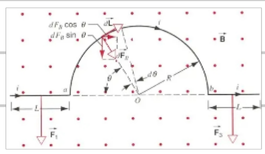
证 $\vec{\tau}=F_{ab}\frac{\ell_1}{2}\sin\theta+F_{cd}\frac{\ell_1}{2}\sin\theta=F_{ab}\ell_1\sin\theta$

$=i\ell_1\ell_2B\sin\theta=iAB\sin\theta$

- 力：$\vec{F}=0$

证 $\vec{F}=\oint i\,d\vec{\ell}\times\vec{B}=i(\oint d\vec{\ell})\times\vec{B}=0$

半圆导线



$F_B=2iB(L+R)$

证 $F_1=F_3=iLB$

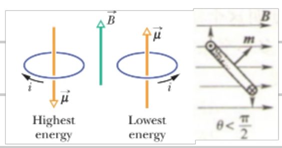
$dF_B=iBd\ell=iBRd\theta$

$F_{2\downarrow}=\int_0^\pi dF_B\sin\theta=iBR\int_0^\pi\sin\theta d\theta=2iBR$

$F_{2\to}=\int_0^\pi dF_B\cos\theta=iBR\int_0^\pi\cos\theta d\theta=0$

$F_B=F_1+F_{2\downarrow}+F_3=2iB(L+R)$

磁偶极子

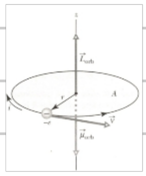


- 定义：$\vec{\mu}=iA\vec{n}$
- 力矩：$\vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B}$
- 能量：$U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$

证 $W=\int\vec{\tau}\cdot d\vec{\theta}=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\mu B\sin\theta d\theta=\mu B\cos\theta$

$U=-W=-\mu B\cos\theta$

原子磁矩经典模型



- 角动量：$\vec{L}_{orb} = m\vec{r}\times\vec{v}$
- 磁矩：$\vec{\mu}_{orb} = -\frac{e}{2m}\vec{L}_{orb}$

证：$\mu_{orb} = iA$

$i = e\frac{v}{2\pi r}$

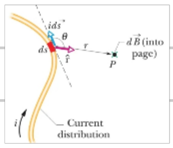
$\Rightarrow \mu_{orb} = e\frac{v}{2\pi r}\pi r^2 = \frac{evr}{2}$

$L_{orb} = mrv \Rightarrow \vec{\mu}_{orb} = -\frac{e}{2m}\vec{L}_{orb}$

Chapter XXX — Current-Produced Magnetic Fields

Biot-Savart 定律

- 运动点电荷：$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}$　$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\,T\cdot m\cdot A^{-1}$：真空磁导率
- 导线：$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{id\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}$



点电荷电场与磁场的联系

$\vec{B}=\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}$

证 $\mu_0=\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$

$\Rightarrow\vec{B}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}=\frac{\vec{v}}{c^2}\times\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\hat{r}}{r^2}\right)=\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}$

长直导线磁场

$B=\frac{\mu_0 i}{4\pi d}\frac{L}{\sqrt{(\frac{L}{2})^2+d^2}}$

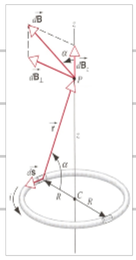
证 $dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{idz\frac{d}{\sqrt{z^2+d^2}}}{z^2+d^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{idz}{(z^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$

$B=\int dB=\frac{\mu_0 id}{4\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{dz}{(z^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_0 i}{4\pi d}\frac{L}{\sqrt{(\frac{L}{2})^2+d^2}}$

当 $L\gg d$ 时，$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi d}$

环状电流轴线上磁场

$B=\frac{\mu_0 iR^2}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$



证 $dB_z=dB\cos\alpha=\frac{\mu_0 ids}{4\pi r^2}\frac{R}{r}=\frac{\mu_0 idsR}{4\pi r^3}$

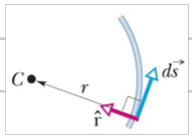
$B=\int dB_z=\frac{\mu_0 iR}{4\pi}\int_0^{2\pi R}\frac{ds}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_0 iR^2}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

当 $z\gg R$ 时，$B=\frac{\mu_0 iR^2}{2z^3}=\frac{\mu_0 p_m}{2\pi z^3}$　p_m：磁偶极矩　表明在远距离处，环状电流可以视作一个磁偶极子

证 $p_m=i(\pi R^2)$，代入即得

圆弧导线在圆心处磁场

$B=\frac{\mu_0 i\varphi}{4\pi R}$

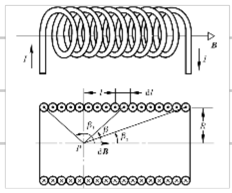


证 $dB=\frac{\mu_0 ids}{4\pi R^2}$

$B=\int dB=\frac{\mu_0 i}{4\pi R^2}\int_0^{\varphi}Rd\theta=\frac{\mu_0 i\varphi}{4\pi R}$

螺线管磁场

$B=\frac{\mu_0 ni}{2}(\cos\beta_2-\cos\beta_1)$　β_1/β_2：点P看螺线管左端/右端的张角

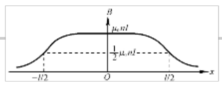


证 $dB=ndl\frac{\mu_0 iR^2}{2(R^2+l^2)^{\frac{3}{2}}}$

$l=R\cot\beta\Rightarrow dl=-R\csc^2\beta\,d\beta\Rightarrow dB=-\frac{\mu_0 ni}{2}\sin\beta\,d\beta$

$B=\int dB=-\frac{\mu_0 ni}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\beta\,d\beta=\frac{\mu_0 ni}{2}(\cos\beta_2-\cos\beta_1)$

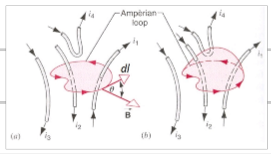
当P在螺线管内部深处，则 $\beta_1\to\pi,\ \beta_2\to0$，$B=\mu_0 ni$　故螺线管内部可视作匀强磁场



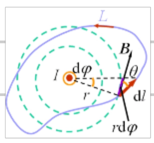
当P在螺线管一端（不妨令其在右端），则 $\beta_1\to\frac{\pi}{2},\ \beta_2\to0$，$B=\frac{\mu_0 ni}{2}$

Ampere 环路定理

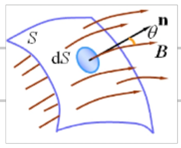
$\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum i$　L：闭合 Ampere 环路　$\sum i$：所有穿过由环路L围成曲面的净电流



证 $\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\oint_L Bdl\cos\theta=\oint_L\frac{\mu_0 i}{2\pi r}rd\varphi=\frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi=\mu_0 i$



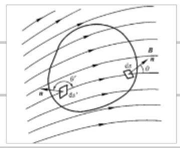
Chapter XXXI — Electromagnetic Induction



磁通量

$d\Phi_B=\vec{B}\cdot d\vec{S}=B(dS)\cos\theta$

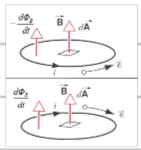
$\Phi_B=\int d\Phi_B=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}$



磁场的 Gauss 定律

穿过任何闭合曲面的磁通量恒等于零.

$\Phi_B=\oint\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$

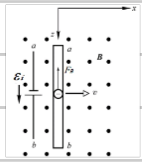


Faraday 电磁感应定律

$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi_B}{dt}$

Lentz 定律

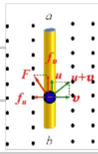
感应电流的方向总是使得它所产生的磁场, 去阻碍引起该感应电流的磁通量的变化.



动生电动势

$d\mathcal{E}=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{s}$

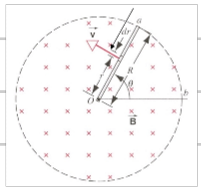
$\mathcal{E}=\int d\mathcal{E}=\int(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{s}$



Lorentz 力分量做功

$\vec{F}=-e(\vec{v}+\vec{u})\times\vec{B}$ 总功为零

- $\vec{f}_v=-e(\vec{v}\times\vec{B})$ 对电荷做功, 负责提供能量, 驱动电荷产生电动势, 与宏观运动相关
- $\vec{f}_u=-e(\vec{u}\times\vec{B})$ 不做功, 负责传递能量, 将机械能转化为焦耳热, 与微观电流相关



旋转导体棒在匀强磁场中的电动势

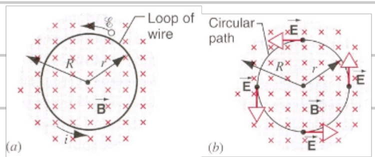
$\mathcal{E}=-\frac{1}{2}B\omega R^2$

证1 $d\mathcal{E}=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{s}=Bv\,dr=B\omega r\,dr$

$\mathcal{E}=\int d\mathcal{E}=\int_0^R B\omega r\,dr=\frac{1}{2}B\omega R^2$

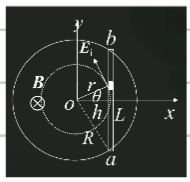
证2 $\Phi_B=B(\frac{1}{2}\theta R^2)$

$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi_B}{dt}=-\frac{1}{2}BR^2\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{2}B\omega R^2$



感生电场

$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi_B}{dt}=\oint\vec{E}_i\cdot d\vec{l}\Leftrightarrow\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$



静止导体棒电动势

$a\to b$ 的电动势: $\mathcal{E}=\frac{hL}{2}\frac{dB}{dt}$

证1 $\oint\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=2\pi rE_i$, $-\oint\frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{s}=-\pi r^2\frac{dB}{dt}$

$\oint\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=-\oint\frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{s}\Rightarrow\vec{E}_i=-\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$

$d\mathcal{E}_i=\vec{E}_i\cdot d\vec{y}=E_i\,dy\cos\theta=\frac{h}{2}\frac{dB}{dt}dy$

$\mathcal{E}_i=\int d\mathcal{E}_i=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{h}{2}\frac{dB}{dt}dy=\frac{hL}{2}\frac{dB}{dt}$

证2 考察环路 acba

$\Phi_B=B(\frac{1}{2}R^2\theta+\frac{1}{2}Lh)$

$\mathcal{E}_{acba}=-\frac{d\Phi_B}{dt}=-\frac{R^2\theta+hL}{2}\frac{dB}{dt}$

$\mathcal{E}_{acb}=\mathcal{E}_{cir}\frac{\theta}{2\pi}=(-\pi R^2\frac{dB}{dt})\frac{\theta}{2\pi}=-\frac{R^2\theta}{2}\frac{dB}{dt}$

$\mathcal{E}_{ab}=\mathcal{E}_{acba}-\mathcal{E}_{acb}=-\frac{hL}{2}\frac{dB}{dt}$

证3 考察环路 abda, 类似证2

证4 考察环路 aoba

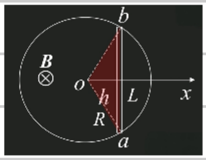
$\Phi_B=B(\frac{1}{2}Lh)$

$\mathcal{E}_{aoba} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{hL}{2}\frac{dB}{dt}$

$\vec{E}_i \cdot \vec{r} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{oa} = \mathcal{E}_{ob} = 0$

$\Rightarrow \mathcal{E}_{ab} = \mathcal{E}_{aoba} - \mathcal{E}_{oa} - \mathcal{E}_{ob} = -\frac{hL}{2}\frac{dB}{dt}$

运动导体棒电动势

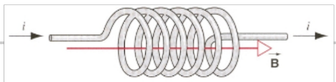


$\mathcal{E} = -v_0\frac{BL}{2} - \frac{hL}{2}\frac{dB}{dt}$

证 $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(\frac{hL}{2}B)}{dt} = -\frac{d\frac{hL}{2}}{dt}B - \frac{hL}{2}\frac{dB}{dt} = -v_0\frac{BL}{2} - \frac{hL}{2}\frac{dB}{dt}$

注 当导体在运动,磁场也在变化时,不能将感生电动势和动生电动势分开计算再相加,因为两者的作用路径具有耦合.

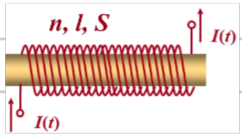
电感



• 定义: $L = \frac{N\Phi_B}{i}$　N:线圈匝数, Φ_B:单匝线圈的磁通量, i:通过线圈的电流

• 自感电动势: $\mathcal{E}_L = -\frac{dN\Phi_B}{dt} = -L\frac{di}{dt}$

螺线管电感



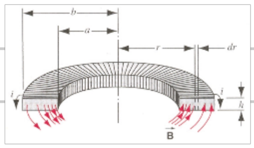
$L = \mu_0 n^2 l S$

证 $B = \mu_0 n i$

$\Phi_B = BS = \mu_0 n i S$

$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{(nl)\mu_0 n i S}{i} = \mu_0 n^2 l S$

环形线圈电感



$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$

证 $B = \mu_0 n i = \frac{\mu_0 i N}{2\pi r}$

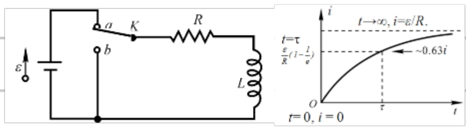
$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_a^b B h\,dr = \int_a^b \frac{\mu_0 i N}{2\pi r} h\,dr = \frac{\mu_0 i N h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$

$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$

自感

• 变化的电流改变磁通,从而产生一个阻碍该变化的电动势.

LR电路



$\tau = \frac{L}{R}$　τ:时间常数

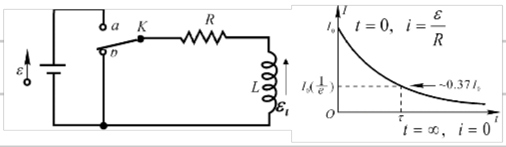
• 充电

$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

证 $\mathcal{E} - iR - L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di}{i - \frac{\mathcal{E}}{R}} = -\frac{R}{L}dt$

两边积分即得

• 放电

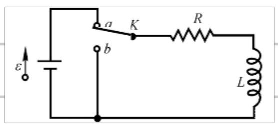


$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

证 $-iR - L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt$

两边积分即得

电感器存储能量



• 电感器存储能量: $U_B = \frac{1}{2}LI_0^2$　$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$: 稳态电流

证 $\mathcal{E}i = i^2R + Li\frac{di}{dt}$　$Li\frac{di}{dt}$: 电感存储能量的速率

$dU_B = (Li\frac{di}{dt})dt = Li\,di$

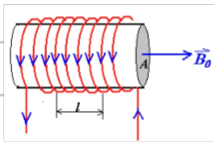
$U_B = \int dU_B = \int_0^{I_0} Li\,di = \frac{1}{2}LI_0^2$

• 放电时电阻耗散的能量: $Q = \frac{1}{2}LI_0^2 = U_B$

证 $Q = \int_0^{+\infty} i^2 R\,dt = \int_0^{+\infty} I_0^2 e^{-\frac{2R}{L}t}dt = \frac{1}{2}LI_0^2$

磁场的能量密度

$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$

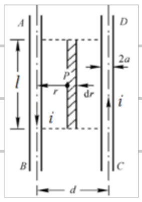


记 $U=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\mu_0 n^2 V I^2$

$u_B=\frac{U}{V}=\frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2$

$B=\mu_0 n I \Rightarrow u_B=\frac{B^2}{2\mu_0}$

一对平行长直导线的单位长度的自感



$L=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$

记 考察回路 ABCD

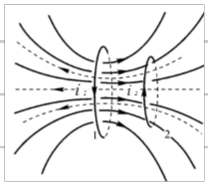
$B_r=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}+\frac{\mu_0 i}{2\pi(d-r)}$，$a \ll r$

$d\Phi_B=B_r\cdot dS=\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}+\frac{\mu_0 i}{2\pi(d-r)}\right)l\,dr$

$\Phi_B=\int d\Phi_B=\int_a^{d-a}\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}+\frac{\mu_0 i}{2\pi(d-r)}\right)l\,dr=\frac{\mu_0 i l}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$

$L=\frac{N\Phi_B}{i}=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$

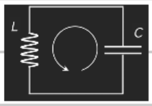
互感



- 互感系数：$M_{12}=M_{21}=M$
- 磁通量：$\Phi_{12}=Mi_1$，$\Phi_{21}=Mi_2$　　$M=\frac{\Phi_{12}}{i_1}=\frac{\Phi_{21}}{i_2}$
- 感应电动势：$\mathcal{E}_2=-M\frac{di_1}{dt}$，$\mathcal{E}_1=-M\frac{di_2}{dt}$

记 $\mathcal{E}_2=-\frac{dN\Phi_{12}}{dt}=-M\frac{di_1}{dt}$，$\mathcal{E}_1$ 同理

LC电路



$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$，$\nu=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$，$T=2\pi\sqrt{LC}$

$q(t)=q_0\cos(\omega t+\varphi)$，$i(t)=-q_0\omega\sin(\omega t+\varphi)$

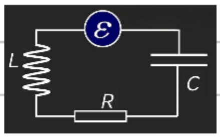
$U_E=\frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\cos^2(\omega t+\varphi)$，$U_B=\frac{1}{2}Lq_0^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi)$

记 $i=\frac{dq}{dt}$，$-L\frac{di}{dt}=\frac{q}{C}$

$\Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2}+\omega^2 q=0$

求解即记

RLC电路



$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$，$\nu=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$，$T=2\pi\sqrt{LC}$

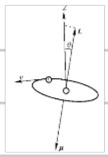
$q(t)=q_0 e^{-\frac{Rt}{2L}}\cos(\omega' t+\varphi)$

若 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_m\cos\omega'' t$，则当 $\omega''=\omega$ 时，i_m 取得最大值

记 $i=\frac{dq}{dt}$，$L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}+iR=0$

$\Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=\mathcal{E}_m\cos\omega'' t$

磁偶极子



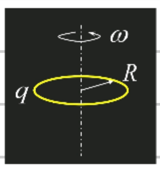
- 磁偶极矩：$|\vec{\mu}|=\frac{evr}{2}$

记 $i=ef=\frac{ev}{2\pi r}$

$|\vec{\mu}|=iS=\frac{ev}{2\pi r}\pi r^2=\frac{evr}{2}$

- 轨道磁偶极矩：$\vec{\mu}_L=-\frac{e}{2m}\vec{L}$　　$\vec{L}=m\vec{r}\vec{v}$：角动量
- 自旋磁偶极矩：$\vec{\mu}_s=-\frac{ge\vec{S}}{2m}$　　$g\approx2$：Landé g 因子，$\vec{S}$：电子自旋角动量，$S_z=\pm\frac{1}{2}\hbar$
- Bohr 磁子：$\mu_B=\frac{eh}{4\pi m_e}=\frac{e\hbar}{2m_e}$　　电子自旋磁矩即为 1 个 μ_B
- $\vec{\mu}=\vec{\mu}_L+\vec{\mu}_s$
- 感应磁矩：$\Delta\vec{\mu}=-\frac{e^2r^2}{4m}\vec{B}$　　表明所有物质都具有抗磁性

绕轴点电荷磁矩



$\mu=\frac{q\omega R^2}{2}$

记 $i=qf=\frac{q\omega}{2\pi}$，$S=\pi R^2$

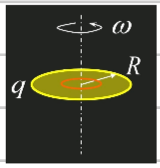
$\mu=iS=\frac{q\omega R^2}{2}$

绕轴带电圆盘磁矩

$$\mu=\frac{q\omega R^2}{4}$$

证 $d\mu = q\frac{2\pi r dr}{\pi R^2}\frac{\omega r^2}{2}=\frac{q\omega r^3}{R^2}dr$

$\mu=\int d\mu=\int_0^R \frac{q\omega r^3}{R^2}dr=\frac{q\omega R^2}{4}$



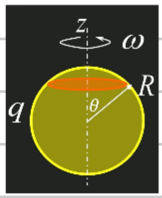
绕轴带电球磁矩

$$\mu=\frac{\mu\omega R^2}{5}$$

证 $\rho=\frac{3q}{4\pi R^3}$

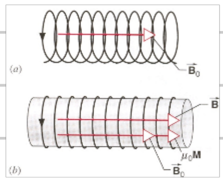
$d\mu=\rho\pi r^2 dz\,\frac{\omega r^2}{4}=\frac{3qR^2\omega\sin^5\theta d\theta}{16}$

$\mu=\int d\mu=\int_0^\pi \frac{3qR^2\omega\sin^5\theta d\theta}{16}=\frac{q\omega R^2}{5}$



磁化

- 磁化强度：$\vec{M}=\frac{\sum_i \vec{\mu}_i}{\Delta V}$
- $\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}_m$ $\quad$ $\vec{B}$：净磁场 $\quad$ $\vec{B}_0$：外加磁场 $\quad$ $\vec{B}_m=\mu_0\vec{M}$：磁化场
- 铁磁率：$K_m=\frac{B}{B_0}$
- 相对磁导率：$\chi_m=K_m-1$



磁性材料

- 顺磁性：$\vec{B}_m$和$\vec{B}_0$同向，K_m：$10^{-6}\sim10^{-4}$
- 抗磁性：$\vec{B}_m$和$\vec{B}_0$反向，K_m：$-10^{-9}\sim-10^{-5}$
- 铁磁性：$\vec{B}_m$和$\vec{B}_0$同向，K_m：$10\sim10^5$

磁化介质中的相关定理

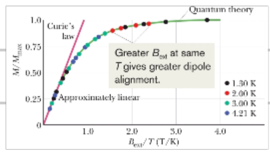
- 面磁化电流密度：$\vec{j}_m=\vec{M}\times\vec{n}$
- 体磁化电流密度：$\vec{i}_m=\vec{j}_m l$
- 磁场强度：$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}=\frac{1}{\chi_m}\vec{M}$
- Ampere环路定律：$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0(\sum i_0+\oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l})\Leftrightarrow\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum i_0$

Curie 定律

顺磁性材料：$M=C\frac{B_0}{T}$ $\quad$ C：Curie常数，由材料本身性质决定 $\quad$ T：温度

注 仅适用于$\frac{B_0}{T}$较小的情况

铁磁性材料：当$T>T_c$时，铁磁性消失，材料转变为顺磁性 $\quad$ T_c：Curie温度



含磁性材料的电感器

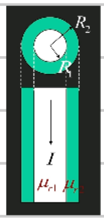
$$L=K_mL_0$$

证 $B=K_mB_0\Rightarrow\Phi_B=K_m\Phi_{B_0}$

$L=\frac{\Phi}{I}\Rightarrow L=K_mL_0$

同轴异材料圆柱导体

$$B(r)=\begin{cases}\frac{\mu_{r_1}\mu_0 Ir}{2\pi R_1^2}, & 0<r<R_1\\ \frac{\mu_{r_2}\mu_0 I}{2\pi r}, & R_1<r<R_2\\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r>R_2\end{cases}\qquad M(r)=\begin{cases}\frac{(\mu_{r_1}-1)Ir}{2\pi R_1^2}, & 0<r<R_1\\ \frac{(\mu_{r_2}-1)I}{2\pi r}, & R_1<r<R_2\\ 0, & r>R_2\end{cases}$$



证 当$r<R_1$时：

$H(2\pi r)=I\frac{\pi r^2}{\pi R_1^2}\Rightarrow H=\frac{Ir}{2\pi R_1^2}$

$B=\mu_{r_1}\mu_0 H=\frac{\mu_{r_1}\mu_0 Ir}{2\pi R_1^2}$

$M=(\mu_{r_1}-1)H=\frac{(\mu_{r_1}-1)Ir}{2\pi R_1^2}$

当$R_1<r<R_2$时：

$H(2\pi r)=I\Rightarrow H=\frac{I}{2\pi r}$

$B=\mu_{r_2}\mu_0 H=\frac{\mu_{r_2}\mu_0 I}{2\pi r}$

$M=(\mu_{r_2}-1)H=\frac{(\mu_{r_2}-1)I}{2\pi r}$

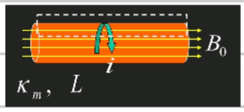
当 $r > R_2$ 时：

$$H(2\pi r) = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}$$

$$B = \mu_0 H = \frac{I}{2\pi r}$$

$$M = 0$$

表面电流



- 表面电流：$i = \frac{(\kappa_m - 1) B_0 L}{\mu_0}$
- 表面电流密度：$i_m = \frac{i}{L} = \frac{(\kappa_m - 1) B_0}{\mu_0}$

记：$B_m = (\kappa_m - 1) B_0$

$$B_m L = \mu_0 i \Rightarrow i = \frac{(\kappa_m - 1) B_0 L}{\mu_0}$$

Chapter XXXII — Nature of Electromagnetic Waves

电磁学基本定律

- Gauss 定律 $\oint \vec{E}_s \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{内} q$ $\qquad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$
- Ampere 定律 $\oint_L \vec{E}_s \cdot d\vec{s} = 0$ $\qquad \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum i$
- Faraday 定律 $\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\oint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A}$

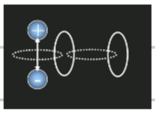
Ampere-Maxwell 定律

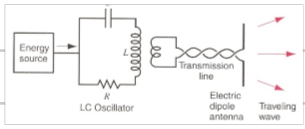
- 位移电流：$i_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{A}$
- 位移电流密度：$j_d = \frac{i_d}{S} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = \frac{dD}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}$ $\quad$ D: 电位移矢量 $\quad \sigma$: 极板上电荷密度
- Ampere-Maxwell 定律：$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0(\sum i + i_d) = \mu_0 \sum i + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 \sum i + \frac{1}{c^2}\frac{d\Phi_E}{dt}$ $\quad$ 即把变化的电场等效地视作电流

Maxwell 方程组

- $\oint \vec{E}_s \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q \quad \Leftrightarrow \quad \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
- $\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0$
- $\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum i + \mu_0\varepsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla\times\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$

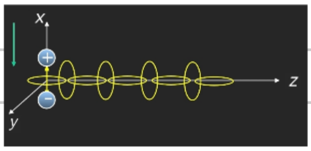
振荡电偶极子





- LC 振荡器：$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \varepsilon_m \cos(\omega'' t)$
- 电流：$i = i_m \sin(\omega' t - \varphi)$
- 共振频率：$\omega'' = \omega' = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

电磁波波动方程



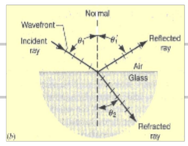
- $\vec{E} = \vec{E}_m \sin[\omega(t - \frac{z}{v}) + \varphi]$
- $\vec{B} = \vec{B}_m \sin[\omega(t - \frac{z}{v}) + \varphi]$
- $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c$
- $E = cB$

电磁波能量

- Poyning 矢量：$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$ $\quad S = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{cB^2}{\mu_0}$ $\quad$ 单位时间通过单位面积的能量
- 能量密度：$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$
- 能量强度：$I = \bar{S} = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c} = \frac{E_m B_m}{2\mu_0} = \frac{cB_m^2}{2\mu_0}$
- 平面波：$I = cu$
- 球面波：$I = \frac{P}{4\pi r^2}$
- 功率：$P = \int \vec{S}\cdot d\vec{A}$

Chapter XXXIV — Geometrical Optics

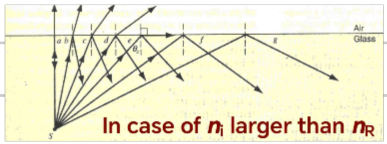
反射与折射



- 反射定律：$\theta_1' = \theta_1$　　θ_1：入射角　θ_1'：反射角
- 折射定律：$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$　　θ_2：折射角　n_1：入射介质折射率　n_2：折射介质折射率
- 折射率：$n = \frac{c}{v} = \sqrt{K_m K_e} \approx \sqrt{K_e}$　　c：真空光速　v：介质光速　$K_m(\mu_r)$：相对磁导率　$K_e(\varepsilon_r)$：相对介电常数

　　对于非磁性材料，$K_m \approx 1$

全反射



- 前提条件：$n_1 > n_2$　　从光密介质射入光疏介质
- 临界角：$\theta_c = \arcsin\frac{n_2}{n_1}$

证　$n_1 \sin\theta_c = n_2 \sin\frac{\pi}{2}$

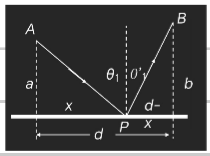
- 全反射：$\theta_1 > \theta_c$

Fermat 原理

$\frac{dt}{dx} = 0$

- 一束光线从一个固定点传播到另一个固定点，所走的路径是平稳路径，即时间的一阶导数为零的路径。

反射定律的推导



$\theta_1' = \theta_1$

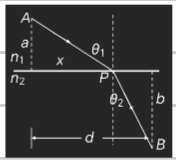
证　$L = \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+(d-x)^2}$

$t = \frac{L}{c}$

$\frac{dt}{dx} = 0$

联立解得 $x = \frac{1}{2}d \Rightarrow \theta_1' = \theta_1$

折射定律的推导



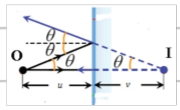
$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

证　$t = \frac{n_1}{c}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{n_2}{c}\sqrt{b^2+(d-x)^2}$

$\frac{dt}{dx} = 0$

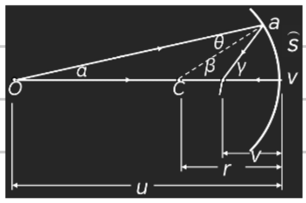
联立解得 $n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = n_2 \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$，即 $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

平面镜



- 像是虚像
- $u = v$　　u：物距　v：像距
- 像是正立的

球面镜



- $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2}{r}$　　r：曲率半径

证　$\sin\alpha = \frac{s}{u}$，$\sin\beta = \frac{s}{r}$，$\sin\gamma = \frac{s}{v}$　　s：物高

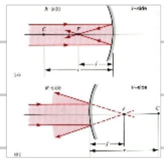
$\beta = \alpha + \theta$，$\gamma = \alpha + 2\theta \Rightarrow \alpha + \gamma = 2\beta$

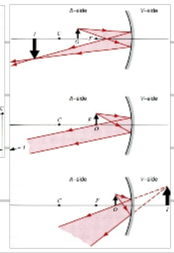
利用小角近似 $\sin\theta \approx \theta$ 代入即得

- 焦距：$f = \frac{r}{2}$
- $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$

符号法则

	R-side	V-side
物	实物 $v>0$	虚物 $v<0$
像	实像 $u>0$	虚像 $u<0$





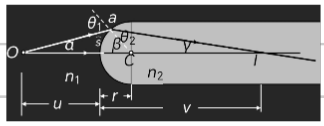
球心　凹面镜 $r>0$　　凸透镜 $r<0$

焦距　$f>0$　　$f<0$

特殊光线

- 平行于主光轴的光线：镜面反射后通过焦点
- 通过焦点的光线：镜面反射后平行于主光轴
- 通过曲率中心的光线：镜面反射后沿原路返回
- 通过顶点的光线：镜面反射时反射角等于入射角

球面镜折射



- $\frac{n_1}{u}+\frac{n_2}{v}=\frac{n_2-n_1}{r}$

证: $\sin\alpha=\frac{s}{u}$, $\sin\beta=\frac{s}{r}$, $\sin\gamma=\frac{s}{v}$

$\theta_1=\alpha+\beta$, $\theta_2=\beta-\gamma$

$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$

利用小角近似 $\sin\theta\approx\theta$ 代入即得

- 横向放大率: $m=-\frac{n_1 v}{n_2 u}$

磨镜公式

$\frac{1}{f}=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$

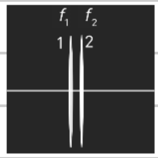
证: 第一次球面折射: $\frac{1}{u}+\frac{n}{v'}=\frac{n-1}{r_1}$

第二次球面折射: $\frac{n}{u'}+\frac{1}{v}=\frac{1-n}{r_2}$

$u'=|v'|+L=-v'$　第一次球面折射的像即为第二次球面折射的物；薄透镜 L 近似为0

联立即得

双薄透镜系统



$f=\frac{f_1 f_2}{f_1+f_2}$

证: $\frac{1}{u_1}+\frac{1}{v_1}=\frac{1}{f_1}$, $\frac{1}{u_2}+\frac{1}{v_2}=\frac{1}{f_2}$

$u_2=-v_1$

$\frac{1}{f}=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{v_2}$

联立即得

Chapter XXXV — Interference

Huygens 原理

波前上的每一点都可以看作是发射球面子波的点源。经过时间 t 后，新的波前就是这些子波的包络面。

光程

- 介质波长：$\lambda_n=\frac{\lambda}{n}$ 　λ：真空波长　n：介质折射率

记 $\lambda_n=\frac{v}{f}=\frac{c}{n}\frac{1}{f}=\frac{\lambda}{f}$

- 光程：$L=nr$ 　r：光在介质中传播的几何距离
- 相位变化：$\varphi=2\pi\frac{nr}{\lambda}=2\pi\frac{L}{\lambda}$

干涉条件

①频率相同

②偏振方向相同

③相位差恒定

双缝干涉

- 同一介质：$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=\begin{cases}\pm 2m\pi, & A=A_{max}\\ \pm(2m+1)\pi, & A=A_{min}\end{cases}$
- 不同介质：$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(n_2r_2-n_1r_1)=\begin{cases}\pm 2m\pi, & A=A_{max}\\ \pm(2m+1)\pi, & A=A_{min}\end{cases}$

　　光程差：$\delta=n_2r_2-n_1r_1=\begin{cases}\pm m\lambda, & A=A_{max}\\ \pm\frac{2m+1}{2}\lambda, & A=A_{min}\end{cases}$

- 实验：$\delta\approx d\frac{y}{D}$

　　$\Delta y=\frac{D}{d}\lambda$

　　$I=4I_0\cos^2\frac{\Delta\varphi}{2}$ 　I_0：单束光光强

记 $A_1=A_2=A_0$

$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}=\sqrt{2A_0^2(1+\cos\Delta\varphi)}$

$I\propto A^2\Rightarrow I=2I_0(1+\cos\Delta\varphi)=4I_0\cos^2\frac{\Delta\varphi}{2}$

半波损失

当光从光疏介质射向光密介质时，反射光的相位会相对入射光发生 π 的突变。故在计算光程差时，需要额外加上 $\frac{\lambda}{2}$。

- 有半波损失时的相位差：$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(n_2r_2-n_1r_1)+\pi=\begin{cases}\pm 2m\pi, & A=A_{max}\\ \pm(2m+1)\pi, & A=A_{min}\end{cases}$

光强的合成

$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos(\Delta\varphi)$ 　$\Delta\varphi$：两束光的相位差

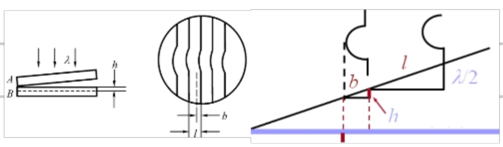
劈尖干涉

$\delta=2n_2\cos\gamma\, e+\frac{\lambda}{2}=\begin{cases}m\lambda, & A=A_{max}\\ \frac{2m+1}{2}\lambda, & A=A_{min}\end{cases}$ 　n_2：劈尖介质折射率　γ：折射角　e：薄膜厚度

条纹间距：$\ell=\frac{\lambda}{2n_2\cos\gamma\,\theta}$ 　θ：劈尖角度

记 $\Delta e=e_{m+1}-e_m=\frac{1}{2n_2}\lambda$

$\ell=\frac{\Delta e}{\sin\theta}=\frac{\lambda}{2n_2\theta}$ 　$\sin\theta\approx\theta$

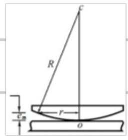


凹陷/凸起厚度：$h=\frac{b}{\ell}\frac{\lambda}{2}$

Newton 环

$\delta = 2e_m + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} m\lambda, \ A = A_{max} \\ \frac{2m+1}{2}\lambda, \ A = A_{min} \end{cases}$ 　　e_m：空气层厚度

$r = \begin{cases} \sqrt{\frac{2m-1}{2}\lambda R}, \ A = A_{max} \\ \sqrt{m\lambda R}, \ A = A_{min} \end{cases}$



证：$r^2 = R^2 - (R-e_m)^2 = 2Re_m - e_m^2 = 2Re_m$ 　$R \gg e_m$

$\Rightarrow e_m = \frac{r^2}{2R}$，代入即得

时间相干性

相干长度：$L_c = \delta_{max} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ 　只有当两束光的光程差小于相干长度时，才能观察到清晰的干涉条纹

证：设入射光包含两个波长 $\lambda \pm \frac{\Delta\lambda}{2}$

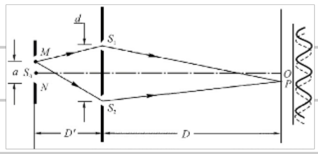
对于波长 $\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}$，第k级亮纹：$\delta_{max_1} = k(\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2})$

对于波长 $\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}$，第k+1级亮纹：$\delta_{max_2} = (k+1)(\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2})$

$\delta_{max_1} = \delta_{max_2} \Rightarrow k = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \Rightarrow \delta_{max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}(\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}) = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ 　$\Delta\lambda = o(\lambda)$

空间相干性

临界宽度：$a = \frac{D'}{d}\lambda$ 　只有光源的宽度小于临界宽度时，才能观察到清晰的干涉条纹



证：$\delta = \frac{a}{2}\frac{d}{D'}$

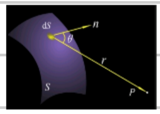
$\delta_{max} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow a = \frac{D'}{d}\lambda$

衍射

- Fraunhofer 衍射：平行光经过狭缝
- Fresnel衍射：点光源照射到障碍物上

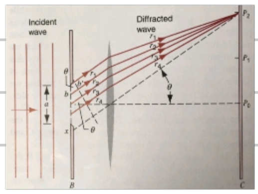
Huygens-Fresnel 原理

- Fresnel-Kirchhoff 衍射积分公式：$dE_p = C\frac{dS}{r}K(\theta)\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r + \varphi_0)$ 　$K(\theta)$：方向因子



单缝 Fraunhofer 衍射

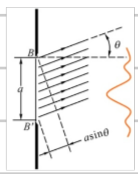
- Fresnel 半波带法：$\delta = a\sin\theta = \begin{cases} 0, \ 中心亮纹 \\ m\lambda, \ A = A_{min} \ 暗纹 \\ \frac{2m+1}{2}\lambda, \ A = A_{max} \ 明纹 \end{cases}$



- 半角宽度：$\theta_1 = \frac{\lambda}{a}$ 　从中心到第一个暗纹的角度，也即最小分辨角 θ_R
- 中心亮纹的宽度：$\Delta x_0 = \frac{2f\lambda}{a}$

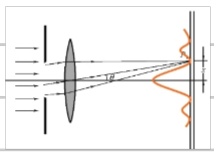
证：$\Delta x_0 = 2x_1 = 2f\tan\theta_1 = 2f\theta_1 = \frac{2f\lambda}{a}$

- 第 m 级暗纹的位置：$x_m = m\frac{f\lambda}{a}$
- 条纹宽度：$\Delta x_m = x_m - x_{m-1} = \frac{f\lambda}{a}$
- 合振幅：$A_\theta = A_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$，$\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$ 　A_0：中央极大振幅
- 合光强：$I_\theta = I_0\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$



圆孔衍射

- 半角宽度：$\theta_1 = 1.22\frac{\lambda}{d}$ 　d:圆孔直径 　θ_1 也记作 $\Delta\theta$, θ_R
- 线宽度：$\Delta x = f(\Delta\theta) = 1.22\frac{f\lambda}{d}$ 　f:透镜焦距
- 分辨率能力：$R = \frac{1}{\theta_R} = \frac{d}{1.22\lambda}$



干涉与衍射的综合效应

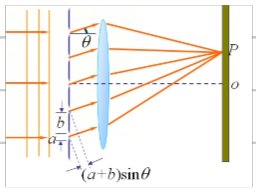
- 衍射因子：$\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$，$\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$
- 干涉因子：$\cos^2\beta$，$\beta = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$
- 总光强：$I_\theta = I_m\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\cos^2\beta$ 　$I_m = I_0$：中央极大光强
- 缺极条件：$m = k\frac{d}{a}$，$k = \pm1, \pm2, \ldots$ 　此时第m级的干涉条纹消失

记: 干涉极大: $\sin\theta=\frac{m\lambda}{d}$

衍射极小: $\sin\theta=\frac{k\lambda}{a}$, $k=\pm1,\pm2,\dots$

$\frac{m\lambda}{d}=\frac{k\lambda}{a}\Rightarrow m=k\frac{d}{a}$

光栅(多缝干涉与单缝衍射的综合效应)



- 光栅常数: $d=a+b$ a:缝宽 b:缝间板宽
- 光栅方程: $d\sin\theta=m\lambda$, $m=0,\pm1,\pm2,\dots$ m:光谱级次 m=0:零级,中央主极大
- 暗纹方程: $d\sin\theta=\frac{m'}{N}\lambda$, $m'=1,2,\dots$ 且 m' 不是 N 的整数倍 N:光栅缝数
- 第 m 级主极大的半角宽度: $\delta\theta=\frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$
- 在两个主极大之间,有 N-2 个次极大
- 缺级条件: $k_2=k_1\frac{d}{a}$, $k_1=\pm1,\pm2,\dots$ 此时第 k_2 级的干涉条纹消失
- 色散率: $D=\frac{d\theta}{d\lambda}=\frac{m}{d\cos\theta}$ 常用 $\Delta\theta=D\Delta\lambda$ 计算不同波长波间的角间隔 $\Delta\theta$

Rayleigh 判据

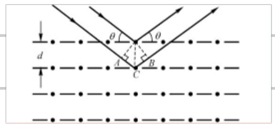
- 当一个谱线的主极大恰好落在另一个谱线的第一个极小值上时,这两个谱线刚好能被分辨.
- 分辨能力: $R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=mN$ m:衍射级次 N:光栅缝数

记: $d\sin\theta=m(\lambda+\Delta\lambda)$ 波长为 $\lambda+\Delta\lambda$ 的 m 级主极大

$Nd\sin\theta=(mN+1)\lambda$ 波长为 λ 的 $(mN+1)$ 级暗纹

联立求解即证.

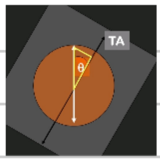
Bragg 定律



$2d\sin\theta=m\lambda$, $m=1,2,\dots$ d:晶面间距 θ:入射角(相对于晶面) λ:入射波波长 m:衍射级次

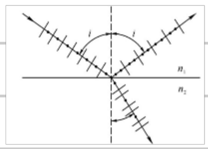
入射波一般使用 X 射线

Malus 定律



- $E_{out}=E_{in}\cos\theta$
- $I_{out}=I_{in}\cos^2\theta$ 起偏器: $I=\frac{1}{2}I_0$

Brewster 定律



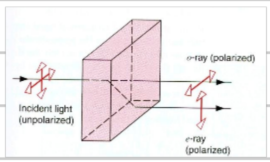
- 当光在两介质间以 Brewster 角入射时,反射光是完全线偏振光
- Brewster 角: $\theta_p=\arctan\frac{n_2}{n_1}$

记: $\theta_p+\theta_r=\frac{\pi}{2}$

$n_1\sin\theta_p=n_2\sin\theta_r$

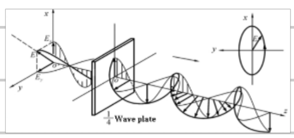
联立即得

双折射



- 寻常光: 遵循 Snell 定律, $n_1\sin\theta=n_2\sin\gamma$ n_2 即为 n_o
- 非寻常光: 不遵循 Snell 定律, n_e 不是常数
- S 偏振光: 电场振动方向垂直于主平面, 对应 o 光 $n_s=n_o$
- P 偏振光: 电场振动方向平行于主平面, 对应 e 光, $n_p=n_e(\theta)$
- 光轴: 一个特定方向, 此方向上 $v_o=v_e$, $n_o=n_e$ 不发生双折射
- 主平面: 由入射光线和光轴共同决定的一个平面
- 折射率公式: $\frac{1}{n^2(\theta)}=\frac{\cos^2\theta}{n_o^2}+\frac{\sin^2\theta}{n_e^2}$
- 正晶体: $v_o>v_e$, $n_o<n_e$
- 负晶体: $v_o<v_e$, $n_o>n_e$

圆偏振



- 相位差: $\Delta\varphi=\varphi_o-\varphi_e=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d=\frac{2\pi}{\lambda}\delta$ d:晶体厚度 δ:光程差
- 分电场: $E_x=E_{x0}\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}z+\Delta\varphi)$, $E_y=E_{y0}\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}z)$

Chapter XXXVII — Light Quanta

黑体辐射

- 单色辐射出射度：在单位时间、单位面积上，从黑体表面辐射出的，波长在λ到$\lambda+d\lambda$这个微小区间内的能量

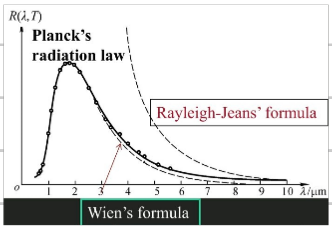
  $R_\lambda(T)=\frac{dR(T)}{d\lambda}$ 单位：$W\cdot m^{-3}$

- 总辐射出射度：在单位时间、单位面积上，从黑体表面辐射出的所有波长的总能量

  $R(T)=\int_0^{+\infty}R_\lambda(T)\,d\lambda$ 单位：$W\cdot m^{-2}$

- Stefan-Boltzmann定律：$R(T)=\sigma T^4$ $\sigma=5.67\times10^{-8}\ W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}$：Stefan-Boltzmann常数
- Wien位移定律：$T\lambda_{max}=b$ λ_{max}：辐射强度最大的波长 $b=2.898\times10^{-3}\ m\cdot K$：Wein位移常数

Planck辐射定理



- Wien公式：$R(\lambda,T)=\frac{C_1}{\lambda^5}e^{-\frac{C_2}{\lambda T}}$ λ较小时拟合较好
- Rayleigh-Jeans公式：$R(\lambda,T)=\frac{2\pi c}{\lambda^4}kT$ λ较大时拟合较好
- 关键假设：谐振子的能量是量子化的：$E=h\nu,\ 2h\nu,\ 3h\nu,\ldots$
- Planck辐射定律：$R(\lambda,T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1)}$ $h=6.626\times10^{-34}\ J\cdot s$：Planck常数

  c：光速 $k=1.381\times10^{-23}\ J\cdot K^{-1}$：Boltzmann常数

Planck辐射定律的相关推导

- 当λ很小时，$R(\lambda,T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1)}=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ $\Rightarrow$ Wien公式：$C_1=2\pi hc^2,\ C_2=\frac{hc}{k}$
- 当λ很大时，$R(\lambda,T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1)}=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\frac{h\nu}{kT}}=\frac{2\pi ckT}{\lambda^4}$ $\Rightarrow$ Rayleigh-Jeans公式
- $\int_0^{+\infty}R(\lambda,T)\,d\lambda=\frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3}T^4$ $\Rightarrow$ Stefan-Boltzmann定律：$\sigma=\frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3}$
- $\frac{dR(\lambda,T)}{d\lambda}=0\Rightarrow\lambda T=\frac{hc}{4.965k}$ $\Rightarrow$ Wien位移定律：$b=\frac{hc}{4.965k}$

光电效应

- 光量子假设：光是量子化的：$E=h\nu$
- 光电效应方程：$h\nu=K_{max}+A$ K_{max}：光电子最大初动能 A：逸出功
- 遏止电压：$V_0=\frac{h}{e}\nu-\frac{A}{e}$

记：$K_{max}=eV_0$，代入整理即得

- 截止频率：$\nu_0=\frac{A}{h}$

Compton效应

- 实验现象：当波长为λ的X射线照射到轻元素靶材上时，散射出的X射线有波长为λ和λ'的两个波，其差值与散射角φ有关
- 光子动量：$p=\frac{E}{c}=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\lambda}$
- Compton位移：$\Delta\lambda=\lambda'-\lambda=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\varphi)=\lambda_c(1-\cos\varphi)$ λ_c：Compton波长 m_0：电子静质量

记：$h\nu+m_0c^2=h\nu'+K+m_0c^2$ 能量守恒

$\frac{h\nu}{c}=\frac{h\nu'}{c}\cos\varphi+mv\cos\theta$ x方向动量守恒 θ：电子反冲角

$0=\frac{h\nu'}{c}\sin\varphi+mv\sin\theta$ y方向动量守恒

$m^2=\frac{m_0^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$

联立求解即得

波粒二象性

- 光子能量：$E=h\nu=\frac{hc}{\lambda}$
- 光子动量：$p=\frac{h}{\lambda}$

记：$E^2=p^2c^2+m^2c^4$，光子$m=0$，代入整理即得

- 光强：单位时间、单位面积上通过的能量

  $I=Nh\nu$ N：单位时间、单位面积上通过的光子数量

Chapter XXXVII — Why are Atoms Stable

Rydberg光谱公式

- 公式：$\frac{1}{\lambda}=R_H\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{n^2}\right)=T(k)-T(n)$，$k=1,2,\dots$，$n=k+1,k+2,\dots$　$R_H=1.0967758\times10^7 m^{-1}$：Rydberg常数　$T(n)$：Rydberg项
- $k=1$：Lyman系，$k=2$：Balmer系，$k=3$：Paschen系，$k=4$：Brackett系

Bohr模型的三条基本假设

- 定态假设：电子可以在一些特定的、能量恒定的定态轨道上运动，而不会辐射电磁波
- 跃迁假设：当电子从一个定态轨道跃迁到另一个定态轨道时，原子会吸收或发射一个光子
- 角动量量子化：电子绕核运动的角动量是量子化的，只能取$\hbar$的整数倍

$L=mvr=n\hbar$　n：主量子数　$\hbar=\frac{h}{2\pi}$：约化Planck常数

量子化轨道与能量计算

- 轨道半径：$r_n=n^2\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$

记　$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{mv^2}{r}$

$mvr=n\hbar$

联立即得

- 电子能量：$E_n=-\frac{1}{n^2}\frac{me^4}{8\varepsilon_0 h^2}$

记　$E_n=\frac{1}{2}mv^2-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}$

$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}=\frac{mv^2}{r_n}$

$r_n=n^2\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$

联立即得

- 电离能：$E_{ion}=|E_1|=13.6eV$
- Rydberg公式：$\frac{1}{\lambda}=\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}\left(\frac{1}{n_f^2}-\frac{1}{n_i^2}\right)$　$R_H=\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}$

记：$h\nu=E_i-E_f$

$E_n=-\frac{1}{n^2}\frac{me^4}{8\varepsilon_0 h^2}$

$c=\lambda\nu$

联立即得

De Brogile物质波

- De Brogile波长：$\lambda=\frac{h}{p}$　$p=\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$：动量
- De Brogile关系：$\nu=\frac{E}{h}$　ν：粒子频率　$E=\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$：粒子能量

Davisson-Germer实验

- Bragg定律：$\lambda=\frac{2d\sin\theta}{k}$
- De Brogile波长：$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2m_0 eU}}$

记：$K=\frac{1}{2}m_0 v^2=eU$

$p=\sqrt{2m_0 K}=\sqrt{2m_0 eU}$

Heisenberg矩阵力学

- 对易关系：$xp-px=i\hbar\neq0$　x：位置算符　p：动量算符
- 不确定性原理：$(\Delta x)(\Delta p_x)\geq\frac{\hbar}{2}$，$(\Delta y)(\Delta p_y)\geq\frac{\hbar}{2}$，$(\Delta z)(\Delta p_z)\geq\frac{\hbar}{2}$

  $(\Delta E)(\Delta t)\geq\frac{\hbar}{2}$

波函数与概率诠释

- De Brogile物质波：$\psi(x,t)=\psi_0 e^{i(kx-\omega t)}=\psi_0(\cos(kx-\omega t)+i\sin(kx-\omega t))$
- 概率密度：$P(x)=\psi\psi^*=|\psi|^2=\psi_0^2$

- 归一化条件：$\int_0^{+\infty} \psi \psi^* dx = 1$

Schrodinger 定态波

- 情形：一个粒子被限制在一个一维盒子内
- 定态波函数：$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(kx) e^{i\omega t}$，$k = \frac{n\pi}{L}$，$n=1, 2, \dots$ L：盒子长度
- 能量与频率的关系：$E = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$
- 概率密度：$P(x) = |\psi(x,t)|^2 = \frac{2}{L}\sin^2(kx)$ 不依赖于时间 t
- 电荷分布：$\rho(x) = -eP(x)$

Chapter XXXVIII — Schrodinger Equation

Schrodinger 方程

- 能量算符：$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\cong E$
- 动量算符：$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\cong p$

记 $E=\frac{p}{2m}$

$E\psi(x,t)=\frac{p}{2m}\psi(x,t)$

$E\psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}=\frac{p}{2m}\psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$

对 t 求偏导：$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{iE}{\hbar}\psi\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=E\psi$

对 x 求二阶导：$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-\frac{p^2}{\hbar^2}\psi\Rightarrow-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi=p^2\psi$

- 动能算符：$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cong\frac{p^2}{2m}=K$
- Hamiltonian 算符：$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+U$
- 含时 Schrodinger 方程：$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi$ $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+U(x,t)]\psi(x,t)$ 一维低速形式

  $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)=[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(\vec{r},t)]\psi(\vec{r},t)$ 三维低速形式 $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

定态

- 条件：势能不随时间变化 $U=U(x)$
- 定态含时 Schrodinger 方程：$E\psi(\vec{r})=[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(\vec{r})]\psi(\vec{r})$ 与时间无关

记 $\psi(\vec{r},t)=\psi(\vec{r})e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

代入变形即得

- 本征方程：$H\psi_n=E_n\psi_n$
- 本征值 E_n：代表系统可能具有的离散能量值
- 本征态：由本征函数 ψ_n 描述的量子态

态叠加原理

- $\psi=\sum C_n\psi_n$ 任何状态都可以表示为所有可能本征态的线性叠加
- 平均能量：$\bar{E}=\sum|C_n|^2E_n$
- 简并：$H\psi_{ni}=E_n\psi_{ni}$，$i=1,2,\dots$ 对于同一个能量本征值 E_n，存在多个不同的本征函数 ψ_{ni}

自由粒子

- 条件：$U(x)=0$
- $\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$，$k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$
- $P(x)=|\psi|^2$ 为恒定值，即在空间任一处出现概率相等

记：在定态方程中代入 $U(x)=0$，得 $\frac{d^2}{dx^2}\psi+k^2\psi=0$

求解即得

无限深势阱

- 条件：$U(x)=\begin{cases}0, & 0<x<a\\ \infty, & x\le 0 \text{ 或 } x\ge a\end{cases}$
- $\psi(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}, & n=1,2,\dots,\ 0<x<a\\ 0, & x\le 0 \text{ 或 } x\ge a\end{cases}$

记：在定态方程中代入 $U(x)=0$，得 $\frac{d^2}{dx^2}\psi+k^2\psi=0$

$\psi(0)=0$，$\psi(a)=0$

$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2=1$

联立求解即得

· 能量本征值：$E_n = \frac{k^2\hbar^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$，$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

记：$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{n\pi}{L}$

联立求解即得

· 零点能：$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ 最小的能量不为0

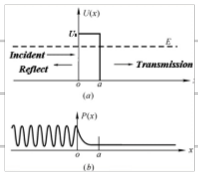
谐振子

· 条件：$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$，$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

· 能量本征值：$E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$，$n = 0, 1, 2, \ldots$

· 零点能：$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$

势垒贯穿



· 条件：$U(x) = \begin{cases} U_0, & 0 \le x \le a \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

· $\psi(x) = \begin{cases} A_1 e^{i\alpha x} + A_2 e^{-i\alpha x}, & x < 0 \\ B_1 e^{i\beta x} + B_2 e^{-i\beta x}, & 0 < x < a \\ C e^{i\alpha x}, & x > a \end{cases}$

其中 $\alpha = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$，$\beta = \frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar}$

· 边界条件：$\lim\limits_{x\to0^-}\psi(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\psi(x)$，$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{d\psi(x)}{dx} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{d\psi(x)}{dx}$ 用边界条件求解系数

$\lim\limits_{x\to a^-}\psi(x) = \lim\limits_{x\to a^+}\psi(x)$，$\lim\limits_{x\to a^-}\frac{d\psi(x)}{dx} = \lim\limits_{x\to a^+}\frac{d\psi(x)}{dx}$

· 透射系数：$T = \frac{|C|^2}{|A_1|^2} \propto e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}\,a} = e^{-2\beta a}$

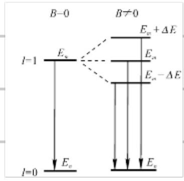
Chapter XL — Hydrogen Atom

氢原子的Schrodinger方程

- 势能函数: $U(r)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$
- Laplacian算子: $\nabla^2\psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$ 球坐标系
- 主量子数n:决定能量，角动量量子数l:决定轨道形状，磁量子数m_l:决定轨道空间取向
- 能量: $E_n=-\frac{1}{n^2}\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}=-\frac{13.6eV}{n^2}$, $n=1,2,3,\dots$ 能量只与主量子数n有关
- 角动量: $L=\sqrt{l(l+1)}\hbar$, $l=0,1,2,\dots,n-1$ 对应s,p,d,f轨道
- 角动量在磁场方向的分量: $L_z=m_l\hbar$, $m_l=0,\pm1,\pm2,\dots,\pm l$
- 定态波函数: $\psi_{nlm_l}(r,\theta,\varphi)=R_{nl}(r)\Theta_{lm_l}(\theta)\Phi_{m_l}(\varphi)$

表 22.1 氢原子的几个归一化波函数

n	l	m_l	$\psi_{nlm_l}=R_{nl}\Theta_{lm_l}\Phi_{m_l}$		
			$R_{nl}(r)$	$\Theta_{lm_l}(\theta)$	$\Phi_{ml}(\varphi)$
1	0	0	$\frac{2}{\sqrt{a_0^3}}e^{-r/a_0}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
2	0	0	$\frac{1}{\sqrt{(2a_0)^3}}(2-\frac{r}{a_0})e^{-r/2a_0}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
2	1	0	$\frac{1}{\sqrt{(2a_0)^3}}\frac{r}{\sqrt{3}a_0}e^{-r/2a_0}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
2	1	±1	$\frac{1}{\sqrt{(2a_0)^3}}\frac{r}{\sqrt{3}a_0}e^{-r/2a_0}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\pm i\varphi}$



- 概率密度: $|\psi(r,\theta,\varphi)|^2$
- 径向概率密度: $P(r)=|R_{nl}(r)|^2r^2$ 电子出现在半径为r，厚度为dr的球壳内的概率

证 $P(r)dr=\int_0^\pi\int_0^{2\pi}|\psi(r,\theta,\varphi)|^2r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi=\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\,|R_{nl}(r)\Theta_{lm_l}(\theta)\Phi_{m_l}(\varphi)|^2r^2\sin\theta\,dr=|R_{nl}(r)|^2r^2dr$

Zeeman 效应

- $\vec{\mu}=-\frac{e}{2m}\vec{L}$, $\Delta E=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$
- $(\Delta L)(\Delta\varphi)\geq\frac{\hbar}{2}$
- 在无外磁场时，不同m_l的能级是简并的；

  在有外磁场时，这些能级会分裂

自旋角动量

- 自旋磁矩: $\vec{\mu}_s=-\frac{e}{2m}\vec{S}$
- 自旋角动量: $S=\sqrt{s(s+1)}\hbar$ 电子: $s=\frac{1}{2}$, $S=\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$
- 自旋磁量子数: $m_s=\pm\frac{1}{2}$ 决定电子自旋方向
- 自旋角动量在磁场方向的分量: $S_z=m_s\hbar=\pm\frac{1}{2}\hbar$

元素周期表

- Pauli不相容原理: 同一个原子中，不存在两个电子具有完全相同的四个量子数
- 能量最低原理: 电子总是优先占据能量最低的轨道